

الصف الأول الثانوى   الفصل الدراسى الأول



للرياضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح   أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل   أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ كمال يونس كبشة

مراجعة وتعديل

د/ محمد محي الدين عبد السلام   أ/ شريف عاطف البرهامي

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

أ/ منال عزقول

إشراف تربوى

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

د/ أكرم حسن



طبعة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

20/30 EGYPT VISION

Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركه فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تحقق من فهمك».

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الجبر والعلاقات والدوال

١ - ١ مقدمة عن الأعداد المركبة. ٤
١ - ٢ تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية. ١٠
١ - ٣ العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها. ١٤
١ - ٤ إشارة الدالة. ٢٠
١ - ٥ متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. ٢٧

الوحدة الثانية: التشابه

٢ - ١ تشابه المضلعات. ٣٢
٢ - ٢ تشابه المثلثات. ٣٦
٢ - ٣ العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين. ٤٥
٢ - ٤ تطبيقات التشابه فى الدائرة. ٥٣

الوحدة الثالثة: نظريات التناسب فى المثلث

٣ - ١ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة. ٦٢
٣ - ٢ منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة. ٧٢

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

٤ - ١ الزاوية الموجهة. ٨٢
٤ - ٢ القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية. ٩٠
٤ - ٣ الدوال المثلثية. ٩٥
٤ - ٤ الزاويا المنتسبة. ١٠٣
٤ - ٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية. ١١٢
٤ - ٦ إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية. ١١٦



الوحدة ١ الجبر

الجبر والعلاقات والدوال

Algebra, Relations and Functions

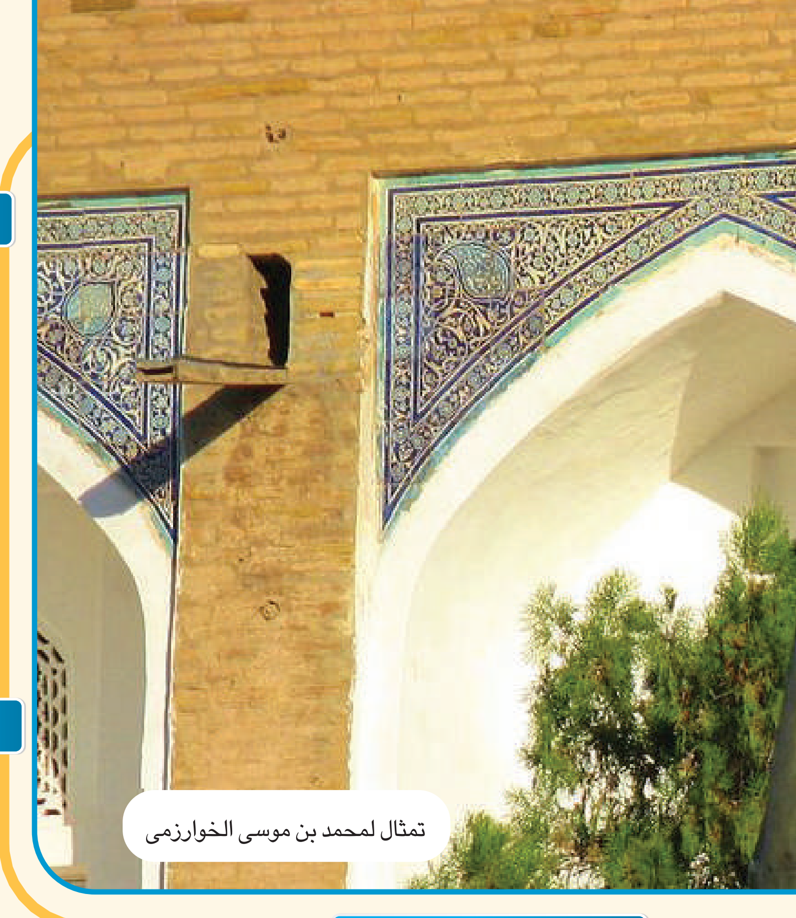
أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مجموع وحاصل ضرب جَذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين).
- يحل متباينات من الدرجةالثانية فى مجهول واحد.

المصطلحات الأساسية

- معادلة Equation
- جذر المعادلة Root of the Equation
- معامل الحد Coefficient of a Term
- مميز المعادلة Discriminant of the Equation
- إشارة دالة Sign of a function
- عدد مركب Complex Number
- عدد تخيلى Imaginary Number
- قوى العدد Powers of a Number
- متباينة Inequality



تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمى

دروس الوحدة

الدرس (١ – ١): مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس (١ – ٢): تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

الدرس (١ – ٣): العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

الدرس (١ – ٤): إشارة الدالة.

الدرس (١ – ٥): متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسومية – بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

نبذه تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمى (القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة العباسى المأمون) فى كتابه الذى ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذى وضع فيه طرقًا أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمى هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد تُرجْم الكتاب إلى اللغات الأوربية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

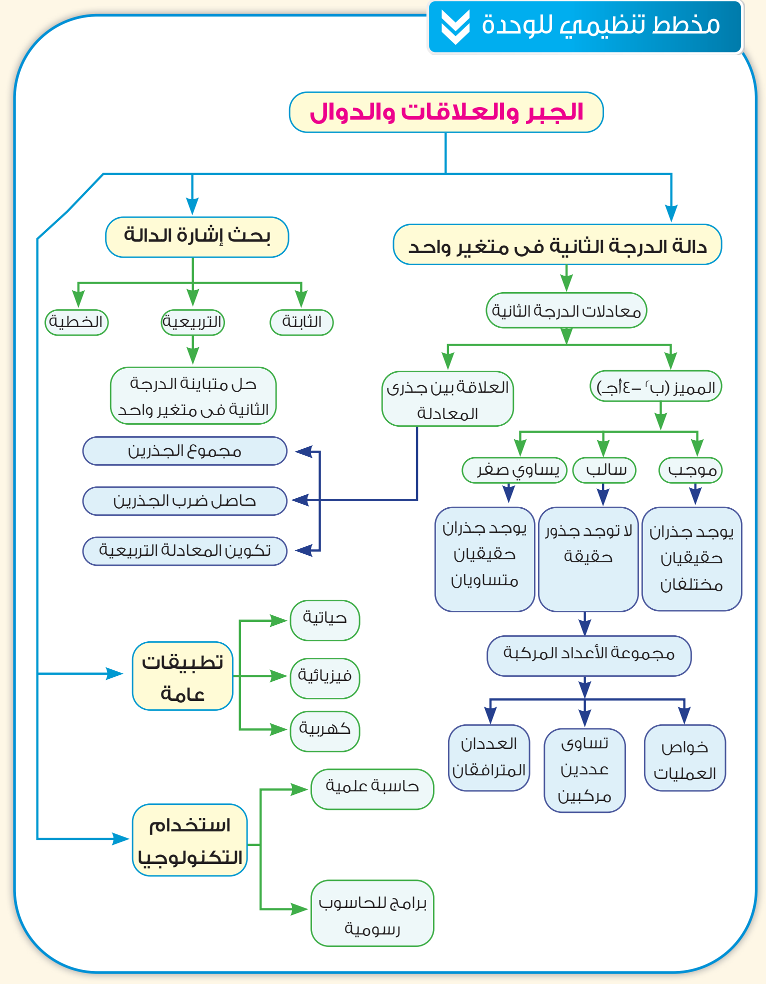
والجذر هو الذى نرمز له حاليًا بالرمز س (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمى حلولاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التى تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذى اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة.

وجدير بالذكر أنه ظهر فى بردية أحمس (١٦٨٠ ق.م) بعض المسائل التى يشير حلها إلى أن المصريين فى ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حاليًا إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم – أبناءنا الطلاب– فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتى حمل علماؤنا فيها لواءَ التقدم ومشاعلَ المعرفة إلى العالم شرقًا وغربًا.

مخطط تنظيمى للوحدة



١ - ١ مقدمة عن الأعداد المركبة

Complex Numbers

سوف تتعلم

- مفهوم العدد التخيلي.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

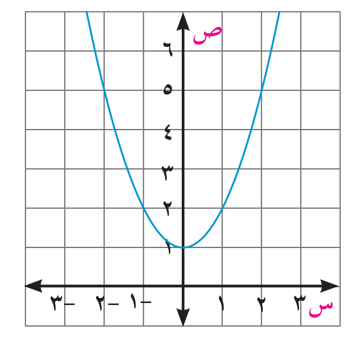
- عدد تخيلى Imaginary Number
- عدد مركب Complex Number

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست نُظمًا مختلفة للأعداد، وهى نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "ن/" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ح" ورأينا أن أى نظام ينَشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، و إذا تأملنا المعادلة $س^٢ = -١$ نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-١) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البيانى للدالة $ص = س^٢ + ١$ نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لايقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ حلول حقيقية.
لذا كان من الضرورى التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

تعلم

العدد التخيلى Imaginary number

يعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى (-١)

أى أن: $ت^٢ = -١$ وله الخاصية $\sqrt{-أ} = ت \sqrt{أ}$ لكل $أ \in ح^+$

وتسمى الأعداد التى على الصورة ٢ت، - ٥ت، $\sqrt{٣}$ ت **بالأعداد التخيلية**

بذلك نكتب $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}$ ت

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}$ ت وهكذا......

تفكير ناقد: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون $\sqrt{أ}\ \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$؟ فسر ذلك بمثال عددى.

قوى ت الصحيحة: Integer powers of *i*

> **لاحظ:** ت يرمز لها بالرمز i

العدد ت يحقق قوانين الأسس التى سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كالآتى:

$\text{ت}^{١} = \text{ت}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$ ، $\text{ت}^{٣} = \text{ت}^{٢} \times \text{ت} = -\text{ت}$

$\text{ت}^{٤} = \text{ت}^{٢} \times \text{ت}^{٢} = -١ \times -١ = ١$ ، $\text{ت}^{٥} = \text{ت}^{٤} \times \text{ت} = ١ \times \text{ت} = \text{ت}$

وبوجه عام فإن: $\text{ت}^{٤\text{ن}} = ١$ ، $\text{ت}^{٤\text{ن}+١} = \text{ت}$ ، $\text{ت}^{٤\text{ن}+٢} = -١$ ، $\text{ت}^{٤\text{ن}+٣} = -\text{ت}$ حيث ن ∈ ص

مثال

١) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ) $\text{ت}^{٣٠}$ ب) $\text{ت}^{٤٣}$ ج) $\text{ت}^{-٦١}$ د) $\text{ت}^{٤\text{ن}+١٩}$

الحل

أ) $\text{ت}^{٣٠} = (\text{ت}^{٤})^{٧} \times \text{ت}^{٢} = ١ \times -١ = -١$

ب) $\text{ت}^{٤٣} = (\text{ت}^{٤})^{١٠} \times \text{ت}^{٣} = ١ \times -\text{ت} = -\text{ت}$

ج) $\text{ت}^{-٦١} = (\text{ت}^{٤})^{-١٦} \times \text{ت}^{٣} = ١ \times \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$

د) $\text{ت}^{٤\text{ن}+١٩} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{١٩} = ١ \times (\text{ت}^{٤})^{٤} \times \text{ت}^{٣} = \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$

حاول أن تحل

١) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ) $\text{ت}^{٢٤}$ ب) $\text{ت}^{٣٧}$ ج) $\text{ت}^{-٤٣}$ د) $\text{ت}^{-٥١}$ هـ) $\text{ت}^{٤\text{ن}+٢٩}$ و) $\text{ت}^{٤\text{ن}+٤٢}$

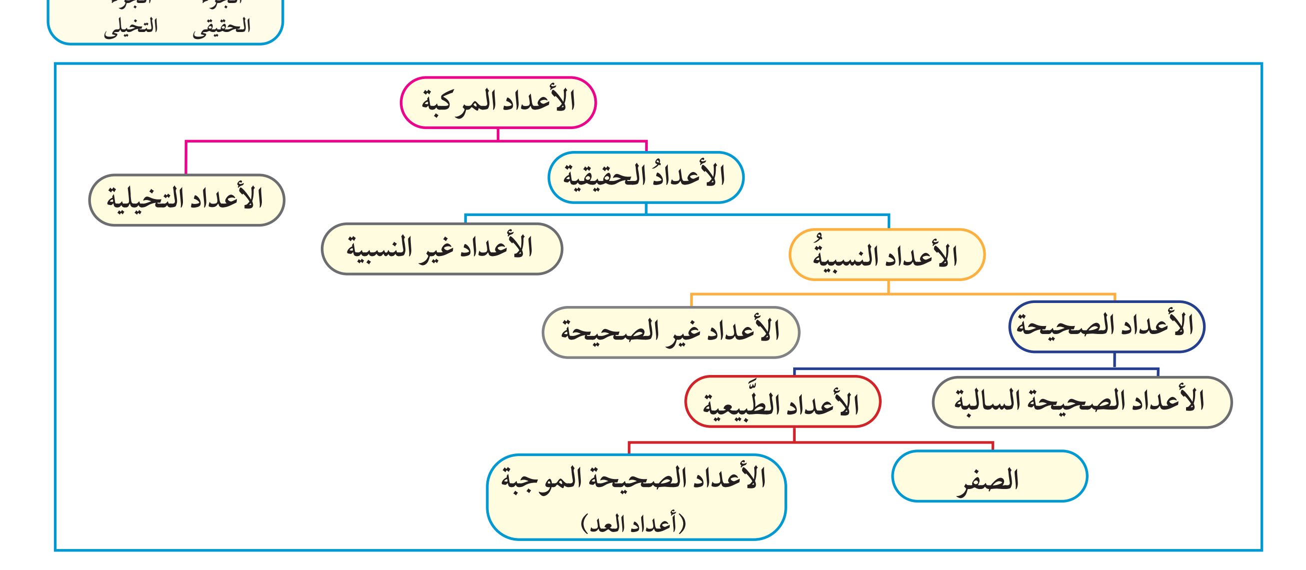
تعلم

العدد المركب Complex number

> **العدد المركب**
> أ + ب ت
> أ: الجزء الحقيقى ، ب ت: الجزء التخيلى

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت حيث أ، ب عددان حقيقيان.

ويبين الشكل التالى مجموعات الأعداد التى تُشكل جزءًا من نظام العدد المركب.



إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث ع = أ + ب ت يسمى عددًا مركبًا، وتسمى أ بالجزء الحقيقي للعدد المركب ع، ب ت بالجزء التخيلي للعدد المركب ع.

و إذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = أ يكون حقيقيًّا، و إذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيليًّا حيث ب ≠ صفر.

مثال

(٢) حل المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

الحل

المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

٩س^{٢} + ١٢٥ − ١٢٥ = ٦١ − ١٢٥   بإضافة (− ١٢٥) إلى طرفي المعادلة

٩س^{٢} = − ٦٤   بقسمة طرفي المعادلة على ٩

س^{٢} = − $\frac{٦٤}{٩}$

س = ± $\sqrt{\frac{-٦٤}{٩}}$ بأخذ الجذر التربيعي

س = ± $\frac{٨}{٣}$ ت   تعريف العدد المركب

حاول أن تحل

(٢) حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠   ب) ٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠   ج) ٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

تساوي عددين مركبين — Equality of two complex numbers

يتَساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان.

إذا كان: أ + ب ت = جـ + ى ت   فإن: أ = جـ ، ب = ى   والعكس صحيح

مثال

(٣) أوجد قيمتي س، ص اللتين تُحققان المعادلة: ٢س − ص + (س − ٢ص)ت = ٥ + ت حيث س، ص ∋ ع، ت^{٢} = −١

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

٢ س − ص = ٥ ، س − ٢ ص = ١

بحل المعادلتين ينتج أن   س = ٣ ، ص = ١

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمتي س، ص اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ ت   ب) ٢س − ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

تعلم العمليات على الأعداد المركبة Operations on complex numbers

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

٤ أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)   ب (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

الحل

أ المقدار = (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)

= (٧ + ٢) + (–٤ + ١) ت   باستخدام خاصيتى الإبدال والتجميع

= ٩ – ٣ ت   بالتبسيط

ب المقدار = (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

= ٢ (٣ – ٤ت) + ٣ت (٣ – ٤ت)   باستخدام خاصية التوزيع

= ٦ – ٨ت + ٩ ت – ١٢ ت^{٢} بفك الأقواس

= ٦ – ٨ت + ٩ت + ١٢   حيث ت^{٢} = – ١

= (٦ + ١٢) + (–٨ + ٩) ت = ١٨ + ت   بالتبسيط

حاول أن تحل

٤ أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (١٢ – ٥ت) – (٧ – ٩ت)   ب (٤ – ٣ت)(٤ + ٣ت)   جـ (٥ – ٦ت)(٣ + ٢ت)

العددان المترافقان Conjugate Numbers

العددان المركبان أ + ب ت ، أ – ب ت يسميان بالعددين المترافقين **فمثلًا** ٤ – ٣ت ، ٤ + ٣ت عددان مترافقان، حيث:

(١) (٤ – ٣ت)(٤ + ٣ت) = (٤)^{٢} – (٣ت)^{٢}

= ١٦ – ٩ت^{٢} = ١٦ – ٩(–١) = ٢٥   (الناتج عدد حقيقى)

(٢) (٤ – ٣ت) + (٤ + ٣ت) = ٨   (الناتج عدد حقيقى)

تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

مثال

٥ أوجد قيمتى س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(٢+ت)(٢-ت)}{٣+٤ت} = س + ت\,ص$$

الحل

$\frac{٤-ت^{٢}}{٣+٤ت} = س + ت\,ص$	بفك الأقواس
$\frac{٤+١}{٣+٤ت} \times \frac{٣-٤ت}{٣-٤ت} = س + ت\,ص$	بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام (٣ − ٤ت)
$\frac{٥(٣-٤ت)}{٢٥} = س + ت\,ص$	بالتبسيط
$\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت = س + ص\,ت$	بتطبيق تساوى عددين مركبين

أى أن: $س = \frac{٣}{٥}$ ، $ص = -\frac{٤}{٥}$

حاول أن تحل

٥ أوجد فى أبسط صورة قيمة كلٍّ مما يأتى:

أ $\frac{٤-٦ت}{٢ت}$ ب $\frac{٢٦}{٣-٢ت}$ ج $\frac{٣-ت}{٢-ت}$ د $\frac{٣+٤ت}{٥-٢ت}$

مثال

٦ كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازي فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى ٥ − ٣ت أمبير وفى المقاومة الثانية ٢ + ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين).

الحل

∵ شدة التيار الكهربى الكلية = مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين.

∴ شدة التيار الكهربى الكلية = (٥ − ٣ت) + (٢ + ت)

= (٥ + ٢) + (−٣ + ١) ت

= ٧ − ٢ت أمبير

تحقق من فهمك

١ تفكير ناقد: أوجد فى أبسط صورة $(١-ت)^{١٠}$.

تمـــارين (١ – ١)

١ ضع كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ $ت^{٦٦}$ ب $ت^{-٤٥}$ ج $ت^{٤ن+٢}$ د $ت^{٤ن-١}$

٢ بسط كلًّا مما يأتى:

أ $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$ ب ٣ ت (– ٢ت)   ج (– ٤ ت) (– ٦ ت)   د $(-٢ ت)^{٣} (-٣ ت)^{٢}$

٣ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتى فى أبسط صورة:

أ (٣ + ٢ت) + (٢ – ٥ ت)   ب (٢٦ – ٤ت) – (٩ – ٢٠ ت)   ج (٢٠ + ٢٥ ت) – (٩ – ٢٠ ت)

٤ ضع كلًّا مما يأتى على صورة أ + ب ت

أ (٢ + ٣ ت) – (١ – ٢ت)   ب $(١ + ٢ت^{٣}) (٢ + ٣ ت^{٥} + ٤ ت^{٦})$

٥ ضع كلًّا مما يأتى على صورة أ + ب ت

أ $\frac{٢}{١ + ت}$ ب $\frac{٤ + ت}{ت}$ ج $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$ د $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ ت}$

٦ حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٣ س^{٢} + ١٢ = ٠$ ب $٤ ص^{٢} + ٢٠ = ٠$ ج $٤ ع^{٢} + ٧٢ = ٠$ د $\frac{٣}{٥} ص^{٢} + ١٥ = ٠$

٧ **اكتشف الخطأ:** أوجد أبسط صورة للمقدار: $(٢ + ٣ت)^{٢} (٢ – ٣ت)$

إجابة أحمد

(٢ + ٣ت)(٢ + ٣ت)(٢ – ٣ت)

$= (٢ + ٣ت) (٤ – ٩ت^{٢})$

= (٢ + ٣ت) (٤ + ٩) = ١٣(٢ + ٣ت)

= ٢٦ + ٣٩ ت

إجابة كريم

$(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ – ٣ت) = (٤ + ٩ت^{٢})(٢ – ٣ت)$

= (٤ – ٩)(٢ – ٣ت) = - ٥ (٢ – ٣ت)

= - ١٠ + ١٥ ت

أى الحلين صحيح؟ لماذا؟..

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

١ - ٢

سوف تتعلم

- كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذر Root
- مميز Discriminant

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلًّا وحيدًا مكررًا، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟

تعلم

المميز **Discriminant**

جذرا المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠، أ، ب، جـ ∈ ع

هما: $\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}$.

يسمى المقدار ب^{٢} - ٤أجـ مميز المعادلة التربيعية، و يستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

مثال

(١) حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

(أ) ٥س^{٢} + س - ٧ = ٠ (ب) س^{٢} - ٢س + ١ = ٠

(جـ) - س^{٢} + ٥س - ٣٠ = ٠

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

(أ) أ = ٥ ، ب = ١ ، جـ = -٧

المميز = ب^{٢} - ٤أجـ

= ١ - ٤ × ٥ (-٧) = ١٤١

∵ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

(ب) أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ١

المميز = ب^{٢} - ٤أ جـ

= ٤ - ٤ × ١ × ١ = ٠

∵ المميز يساوى صفرًا، إذن الجذران حقيقيان ومتساو يان.



ج) أ = -١ ، ب = ٥ ، جـ = -٣٠

المميز = ب٢ - ٤أجـ

= ٢٥ - ٤ × -١ × -٣٠ = -٩٥

∵ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطى للدالة المرتبطة بالمعادلة
(ب٢ - ٤أجـ) > ٠	جذران حقيقيان مختلفان	
ب٢ - ٤أجـ = ٠	جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان)	
ب٢ - ٤أجـ < ٠	جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).	

حاول أن تحل

١) عيِّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

أ) ٦س٢ = ١٩ س - ١٥

ب) ١٢س - ٤س٢ = ٩

ج) س (س - ٢) = ٥

د) س(س + ٥) = ٢(س - ٧)

مثال

٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٢س٢ - ٣ س + ٢ = ٠ مركبان و غير حقيقيين، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

أ = ٢، ب = -٣، جـ = ٢

∵ المميز = ب٢ - ٤أجـ

∴ المميز = (-٣)٢ - ٤ × ٢ × ٢ = ٩ - ١٦ = -٧

∵ المميز سالب

∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين).

القانون العام: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = $\frac{-(-٣) \pm \sqrt{٧ت^2}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,ت}{٤}$

جذرا المعادلة هما: $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت ، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت

تفكير ناقد: هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

حاول أن تحل

٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٧س^{٢} – ١١ س + ٥ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢(ك – ١) س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

ب^{٢} – ٤أجـ = ٠

٤(ك – ١)^{٢} – ٤ × ١ × ٩ = ٠

٤ك^{٢} – ٨ك – ٣٢ = ٠

ك^{٢} – ٢ك – ٨ = ٠

(ك – ٤)(ك + ٢) = ٠

ك = ٤ أو ك = –٢

التحقيق: عندما ك = ٤

تصبح المعادلة: س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

و يكون لها جذران متساويان هما: –٣، –٣

التحقيق: عندما ك = –٢

تصبح المعادلة: س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠

و يكون لها جذران متساويان هما: ٣،٣

حاول أن تحل

٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} – ٢ك س + ٧ك – ٦س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

تمـــارين (١ – ٢)

أولًا: اختيار من متعدد:

١) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٤س + ك = ٠ متساويين إذا كانت: ....

أ) ك = ١ ب) ك = ٤ جـ) ك = ٨ د) ك = ١٦

٢) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٢س + م = ٠ حقيقيين مختلفين إذا كانت: ....

أ) م = ١ ب) م < ١ جـ) م > ١ د) م = ٤

٣) يكون جذرا المعادلة ل س^{٢} – ١٢س + ٩ = ٠ مركبين غير حقيقيين إذا كانت: ....

أ) ل > ٤ ب) ل < ٤ جـ) ل = ٤ د) ل = ١

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٤) حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

أ) س^{٢} – ٢س + ٥ = ٠ ب) ٣س^{٢} + ١٠س – ٤ = ٠

جـ) س^{٢} – ١٠س + ٢٥ = ٠ د) ٦س^{٢} – ١٩س + ٣٥ = ٠

٥ أوجد حل كلٍّ من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام.

أ $س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$ ب $٢س^٢ + ٦س + ٥ = ٠$

ج $٣س^٢ - ٧س + ٦ = ٠$ د $٤س^٢ - س + ١ = ٠$

٦ أوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ + ٤س + ك = ٠$ حقيقيين مختلفين.

ب إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ - ٣س + ٢ + \frac{١}{ك} = ٠$ متساويين.

ج إذا كان جذرا المعادلة $ك س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$ مركبين غير حقيقيين.

٧ اكتشف الخطأ: ما عدد حلول المعادلة $٢س^٢ - ٦ س = ٥$ فى ح

إجابة أحمد

$ب^٢ - ٤أجـ = (-٦)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٥$

$= ٣٦ - ٤٠ = -٤$

المميز سالب، فلا توجد حلول حقيقية

إجابة كريم

$ب^٢ - ٤أجـ = (-٦)^٢ - ٤ \times ٢ \times (-٥)$

$= ٣٦ + ٤٠ = ٧٦$

المميز موجب، فيوجد حلَّان حقيقيان مختلفان

٨ إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ + ٢ (ك - ١) س + (٢ك + ١) = ٠$ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذريين.

٩ تفكير ناقد: حل المعادلة $٣٦ س^٢ - ٤٨ س + ٢٥ = ٠$ فى مجموعة الأعداد المركبة.

١ - ٣ العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مجموع جذرين Sum of Two Roots
- حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

نعلم أن جذرى المعادلة $\text{٤س}^{٢} - \text{٨س} + ٣ = ٠$ هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$

مجموع الجذرين $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = \frac{١+٣}{٢} = ٢$

حاصل ضرب الجذرين $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٤}$

هل توجد علاقة بين مجموع جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟



تعلم

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sum and multiply of two roots

جذرا المعادلة التربيعية $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ هما:

$\frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{٤أجـ}}}{\text{٢أ}}$ ، $\frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{٤أجـ}}}{\text{٢أ}}$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثانى = م فإن:

$\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ (أثبت ذلك) $\text{ل م} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ (أثبت ذلك)

تعبير شفهى فى المعادلة التربيعية $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$

أوجد ل + م ، ل م فى الحالات الآتية:

(أ) إذا كان أ = ١ (ب) إذا كانت ب = أ (جـ) إذا كان أ = جـ

مثال

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة:

$\text{٢س}^{٢} + ٥\text{ س} - ١٢ = ٠$

الحل

أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = −١٢

مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{-٥}{٢} = -\frac{٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

حاول أن تحل

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

(أ) ٢ س^{٢} + س − ٦ = ٠ (ب) ٣ س^{٢} = ٢٣ س − ٣٠ (جـ) (٢س − ٣) (س + ٢) = ٠

مثال

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢ س^{٢} − ٣ س + ك = ٠ يساوى ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة.

الحل

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ $\frac{ك}{٢}$ = ١ ∴ ك = ٢

أ = ٢، ب = −٣، جـ = ٢

القانون العام: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

= $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٧ت^{٢}}}{٤}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٧}ت}{٤}$

مجموعة حل المعادلة هى {$\frac{٣}{٤}$ + $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت ، $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت}

حاول أن تحل

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٣س^{٢} + ١٠س − جـ = ٠ هو $\frac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ، ثم حل المعادلة.

(٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة ٢ س^{٢} + ب س − ٥ = ٠ هو $-\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

مثال

(٣) إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^{٢} − ٢ س + أ = ٠ حيث أ ∈ ح فأوجد:

(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة أ

الحل

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = أ

(أ) ∵ ١ + ت هو أحد جذرى المعادلة

∴ الجذر الآخر = ١ − ت لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما = ٢

(ب) ∵ حاصل ضرب الجذرين = أ

∴ (١ + ت) (١ − ت) = أ

∴ ١ + ١ = أ ∴ أ = ٢

حاول أن تحل

(٤) إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^{٢} −٤ س + ب = ٠ حيث ب ∈ ح فأوجد

(أ) الجذر الآخر. (ب) قيمة ب



تعلم تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ \neq ٠$

بقسمة طرفى المعادلة على أ: $\therefore س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

أى $س^{٢} - (\frac{-ب}{أ}) س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

$\because$ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ، $ل + م = -\frac{ب}{أ}$ ، $ل م = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ المعادلة التربيعية التى جذراها ل،م هى: $س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$

مثال

٤ كون المعادلة التربيعية التى جذراها ٤، -٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$\because ل + م = ٤ + (-٣) = ١$، $ل م = ٤ (-٣) = -١٢$، $\because$ صيغة المعادلة التربيعية هى: $س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$

$\therefore$ المعادلة هى: $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

مثال

٥ كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها: $\frac{-٢+٢ت}{ت+١}$ ، $\frac{-٢-٤ت}{ت-٢}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$ل = \frac{-٢+٢ت}{ت+١} \times \frac{ت-١}{ت-١} = \frac{٤ت}{٢} = ٢ت$

$م = \frac{-٢-٤ت}{ت-٢} \times \frac{ت+٢}{ت+٢} = \frac{-١٠ت}{٥} = -٢ت$

$ل + م = ٢ت - ٢ت = ٠$

، $ل م = ٢ت \times -٢ت = -٤ت^{٢} = ٤$

$\because$ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م : $س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٤ = ٠$

حاول أن تحل

٥ كوِّن المعادلة التربيعية فى كل مما يأتى بمعلومية جذريها:

أ ٣ ، -٥ ب -٩ت ، ٩ت ج $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣+٣ت}{١-ت}$

تفكير ناقد: الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التى يمر كل منها بالنقطتين (٢، ٠) ، (−٢، ٠).
أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

مثال

٦ إذا كان ل، م جذرى المعادلة $٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$ فكون المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^٢$، $م^٢$.

الحل

المعادلة المعلومة بالتعويض عن أ = ٢، ب = −٣، جـ = −١: $ل + م = -\frac{ب}{أ} = \frac{٣}{٢}$، $ل م = -\frac{١}{٢}$

المعادلة المطلوبة بالتعويض عن $ل + م = \frac{٣}{٢}$، $ل م = -\frac{١}{٢}$ فى الصيغة $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

$\therefore ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = (\frac{٣}{٢})^٢ - ٢ \times (-\frac{١}{٢})$

$= \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{٩}{٤} + \frac{٤}{٤} = \frac{١٣}{٤}$

$\therefore ل^٢ م^٢ = (ل م)^٢$

$\therefore ل^٢ م^٢ = (-\frac{١}{٢})^٢ = \frac{١}{٤}$

> **لاحظ أن**
> $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$
> $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م$

بالتعويض فى صيغة المعادلة التربيعية: $س^٢$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

$س^٢ - \frac{١٣}{٤} س + \frac{١}{٤} = ٠$ بضرب طرفى المعادلة فى ٤

$\therefore$ المعادلة التربيعية المطلوبة هى: $٤ س^٢ - ١٣ س + ٤ = ٠$

حاول أن تحل

٦ فى المعادلة السابقة $٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$ كوِّن المعادلات التربيعية التى جذرا كل منها كالآتى:

أ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ ب $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$ ج $ل + م$ ، $ل م$

تحقق من فهمك

١ فى كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التى جذراها:

أ $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ب $٥\sqrt{٣}$ ، $-٢\sqrt{٣}$ ج



$٣ + \sqrt{٢}$ ت ، $٣ - \sqrt{٢}$ ت

٢ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^٢ + ٣ س - ٥ = ٠$ فكوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^٢$، $م^٢$.

تمارين (١ - ٣)

أولًا: أكمل ماياتى:

١) إذا كان س = ٣ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + م س - ٢٧ = ٠ فإن م = ...، الجذر الآخر = ...

٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ٧ س + ٣ ك = ٠ يساوى مجموع جذرى المعادلة:
س^{٢} - (ك + ٤) س = ٠ فإن ك = ...

٣) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذرى المعادلة س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠ هى ....

٤) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذرى المعادلة س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠ هى ....

ثانيًا: الاختيار من متعدد

٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} - ٣ س + جـ = ٠ ضعف الآخر فإن جـ تساوى ....

أ) -٤ ب) -٢ جـ) ٢ د) ٤

٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًّا للآخر، فإن أ تساوى ....

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ٢ د) ٣

٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢}- (ب - ٣) س + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًّا للآخر، فإن ب تساوى ....

أ) -٥ ب) -٣ جـ) ٣ د) ٥

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية

٨) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل معادلة فيما يأتى:

أ) ٣ س^{٢} + ١٩ س - ١٤ = ٠ ....

ب) ٤ س^{٢} + ٤ س - ٣٥ = ٠ ....

٩) أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة فى كل مما يأتى:

أ) إذا كان: س = - ١ أحد جذرى المعادلة س^{٢} - ٢ س + أ = ٠ ....

ب) إذا كان: س = ٢ أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} - ٥ س + أ = ٠ ....

١٠) أوجد قيمة أ، ب فى كل من المعادلات الآتية إذا كان:

أ) ٢، ٥ جذرا المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ ....

ب) -٣، ٧ جذرا المعادلة أس^{٢} - ب س - ٢١ = ٠ ....

جـ) -١، $\frac{٣}{٢}$ جذرا المعادلة أ س^{٢} - س + ب = ٠ ....

د) $\sqrt{٣}$ ت ، - $\sqrt{٣}$ ت جذرا المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ ....

(١١) ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية، ثم أوجد مجموعة حل كل منها:

(أ) $س^{٢} + ٢س - ٣٥ = ٠$ (ب) $٢س^{٢} + ٣س + ٧ = ٠$

(ج) $س(س - ٤) + ٥ = ٠$ (د) $٣س(٣س - ٨) + ١٦ = ٠$

(١٢) أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة $جـ س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠$ متساويين.

(١٣) أوجد قيمة أ التى تجعل جذرى المعادلة $س^{٢} - ٣س + ٢ + \frac{١}{أ} = ٠$ متساويين.

(١٤) أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة $٣ س^{٢} - ٥ س + جـ = ٠$ متساويين، ثم أوجد الجذرين.

(١٥) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة $س^{٢} + (ك - ١) س - ٣ = ٠$ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

(١٦) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $٤ ك س^{٢} + ٧ س + ك^{٢} + ٤ = ٠$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(١٧) كون معادلة الدرجة الثانية التى جذراها كالآتى :

(أ) $-٢ ، ٤$ (ب) $-٥ ت ، ٥ ت$ (ج) $\frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٢}$

(د) $١ - ٣ت ، ١ + ٣ت$ (هـ) $٣ - ٢\sqrt{٢} ت ، ٣ + ٢\sqrt{٢} ت$

(١٨) أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ضعفا جذرى المعادلة $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$

(١٩) أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$

(٢٠) أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة : $س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

(٢١) إذا كان ل، م جذرى المعادلة $س^{٢} - ٧ س + ٣ = ٠$ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التى جذراها:

(أ) ٢ ل، ٢ م (ب) ل + ٢، م + ٢ (ج) $\frac{٢}{ل} ، \frac{٢}{م}$ (د) ل + م، ل م

١ - ٤ إشارة الدالة

Sign of the Function

سوف تتعلم

- بحث إشارة كل من: الدالة الثابتة – دالة الدرجة الأولى – دالة الدرجة الثانية.

المصطلحاتُ الأساسيّة

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



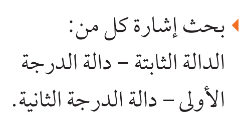
سبق أن درست التمثيل البيانى لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟
المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير س (مجال س) التى تكون عندها قيم الدالة د على النحو الآتى:

موجبة، أى د(س) > ٠

سالبة، أى د(س) < ٠

مساوية للصفر د(س) = ٠

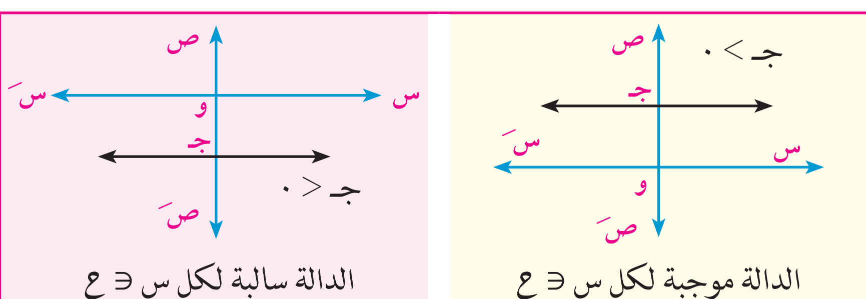






أولاً: إشارة الدالة الثابتة **First: The sign of the Constant Function**

إشارة الدالة الثابتة د حيث د(س) = جـ (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.
والشكل التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

١ عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٥ ب د(س) = -٧

الحل

أ ∵ د(س) > ٠ ∴ إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع

ب ∵ د(س) < ٠ ∴ إشارة الدالة سالبة لكل س ∈ ع

حاول أن تحل

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

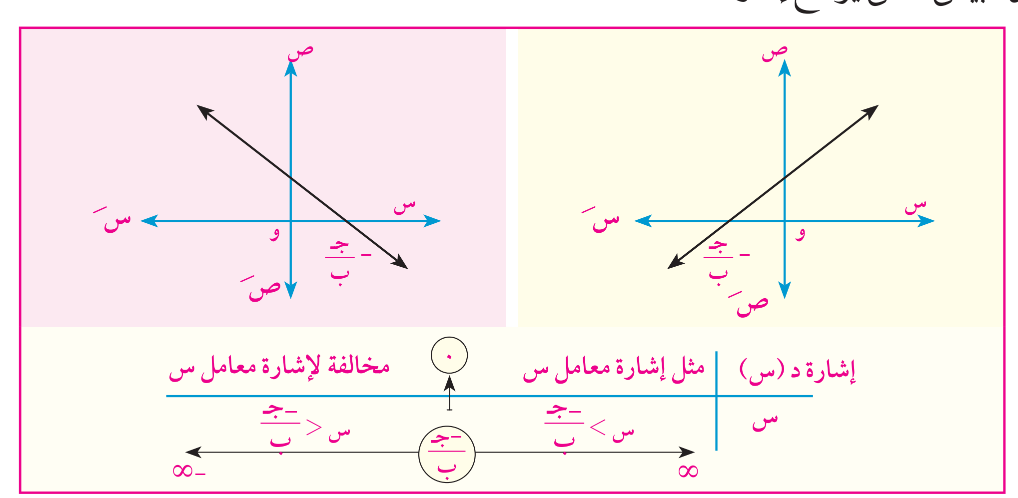
أ د(س) = $-\frac{٢}{٣}$ ب د(س) = $\frac{٥}{٢}$

ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

Second: Sign of the Linear Function

قاعدة الدالة د هي د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠ ، س = $-\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠

والشكل البيانى التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

(٢) عين إشارة الدالة د حيث د(س) = س − ٢ مع توضيح ذلك بيانيًّا:

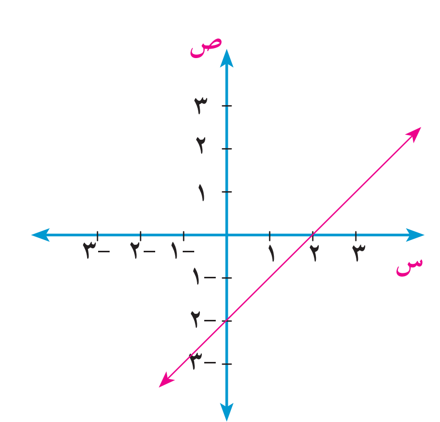
الحل

قاعدة الدالة: د(س) = س − ٢

رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د(س) = −٢



من الرسم نجد أن:

- الدالة موجبة عندما س > ٢
- الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢
- الدالة سالبة عندما س < ٢

حاول أن تحل

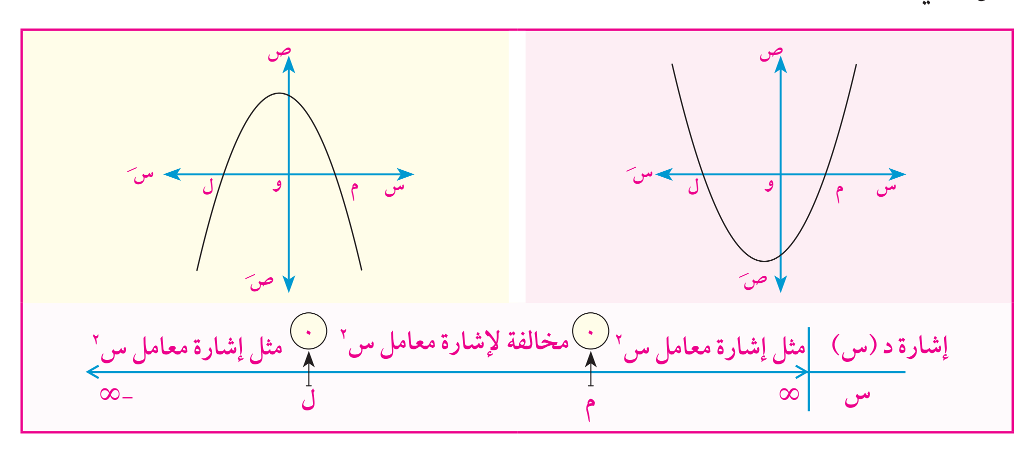
(٢) عين إشارة الدالة د(س) = −٢س − ٤ مع توضيح ذلك بيانيًّا.

ثالثا: إشارة الدالة التربيعية　　Third: Sign of the Quadratic Function.

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث د(س) = أ س^{2} + ب س + جـ

نوجد مميز المعادلة أ س^{2} + ب س + جـ = ٠ فإذا كان:

أولًا: ب^{2} − ٤أ جـ > ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن ل < م تكون إشارة الدالة كما فى الأشكال الآتية:



مثال

(٣) مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = س^{2} − ٢ س − ٣ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة: س^{2} − ٢ س − ٣ = ٠

(س − ٣) (س + ١) = ٠

فيكون جذرا المعادلة: −١، ٣

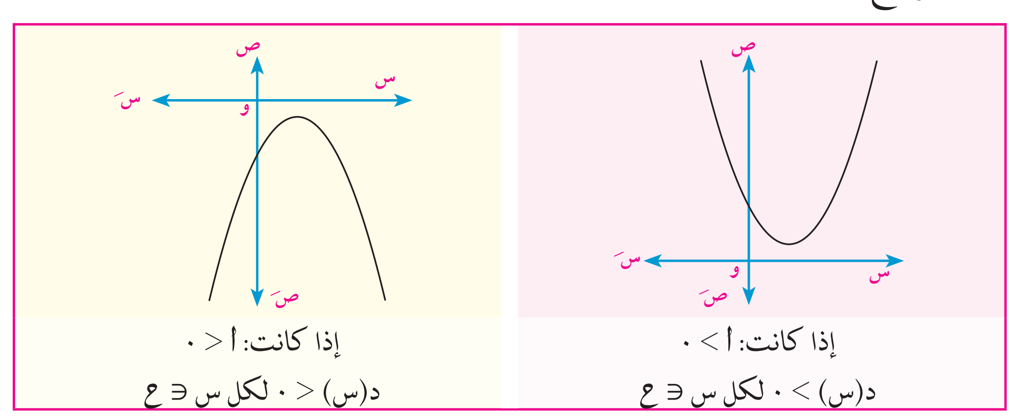
من الرسم نجد أن:

- د(س) > ٠ عندما س ∈ ح − [−١، ٣]
- د(س) < ٠ عندما س ∈]−١، ٣[
- د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١، ٣}

حاول أن تحل

(٣) مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = س^{2} − س + ٦ ثم عين إشارة الدالة د.

ثانيًا: إذا كان: $ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠$ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل $س^٢$، والأشكال التالية توضح ذلك.



مثال

④ مثل بيانيًّا د حيث $د(س) = س^٢ - ٤س + ٥$ ثم عين إشارة الدالة د.

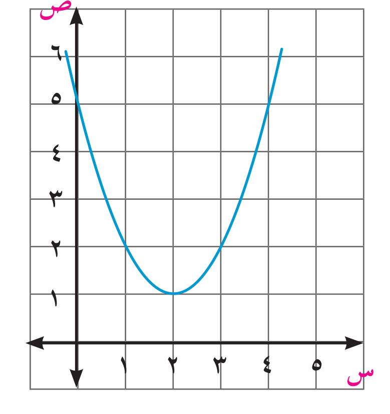
الحل

المميز $(ب^٢ - ٤ أ جـ) = (-٤)^٢ - ٤ × ١ × ٥$

$= ١٦ - ٢٠ = -٤ < ٠$

لذلك فإن المعادلة $س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية

إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع (لأن معامل $س^٢ > ٠$)



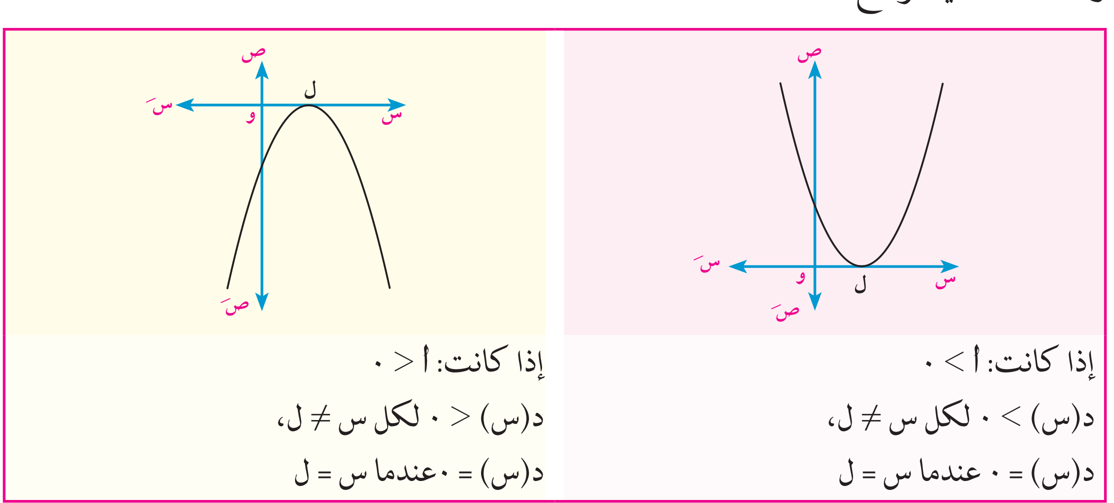
حاول أن تحل

④ مثل بيانيًّا د، حيث $د(س) = -س^٢ - ٢س - ٤$ ثم عين إشارة الدالة د.

ثالثًا: إذا كان: $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى:

- مثل إشارة أ عندما س ≠ ل
- د(س) = ٠ عندما س = ل

والأشكال الآتية توضح ذلك.



مثال

(٥) مثل بيانيًّا د حيث د(س) =٤ س^٢ – ٤س + ١ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب^٢– ٤أ جـ) = (–٤)^٢ – ٤ × ٤ × ١

= ١٦ – ١٦ = ٠

لذلك فإن المعادلة ٤ س^٢ – ٤س + ١ = ٠ لها جذران متساويان.

بالتحليل: (٢س – ١)^٢ = ٠

بوضع: ٢س – ١ = ٠ تكون س = $\frac{١}{٢}$

د(س) > ٠ عندما س ≠ $\frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

(٥) مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = – ٤ س^٢ – ١٢س – ٩ ثم عين إشارة الدالة د.

مثال

(٦) اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ع يكون جذرا المعادلة ٢س^٢ – ك س + ك –٣ = صفر حقيقيين مختلفين

الحل

المميز (ب^٢ – ٤أجـ) = (–ك)^٢ – ٤ × ٢ × (ك – ٣) = ك^٢ – ٨ك +٢٤

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

نبحث إشارة المقدار ص = ك^٢ – ٨ك +٢٤

فيكون مميز المعادلة ك^٢ – ٨ك + ٢٤ = ٠ هو:

(–٨)^٢ – ٤ × ١ × ٢٤ = ٦٤ – ٩٦ = –٣٢ < ٠

لذلك فإن المعادلة ك^٢ – ٨ك +٢٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة المقدار ص = ك^٢ – ٨ك +٢٤ موجبة لكل س ∈ ع (لماذا)؟

فيكون مميز المعادلة ٢س^٢ – ك س + ك –٣ = صفر موجب لكل س ∈ ع

∴ جذرا المعادلة ٢س^٢ – ك س + ك – ٣ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ع

تحقق من فهمك

(١) عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

(أ) د(س) = ٢س – ٣ (ب) د(س) = ٤ – س (جـ) د(س) = س^٢ – ٤

(د) د(س) = ١ – س^٢ (هـ) د(س) = ٤ + ٤س + س^٢ (و) د(س) = ٣س – ٢س^٢ + ٤

تمـــارين (١ – ٤)

أولًا: أكمل ما يأتى:

١ الدالة د، حيث د(س) = - ٥ إشاراتها .... فى الفترة ....

٢ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ + ١ إشاراتها .... فى الفترة ....

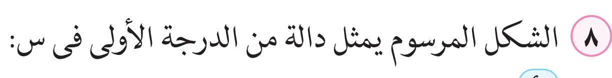
٣ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ – ٦ س + ٩ موجبة فى الفترة ....

٤ الدالة د، حيث د(س) = س – ٢ موجبة فى الفترة ....

٥ الدالة د، حيث د(س) = ٣ – س سالبة فى الفترة ....

٦ الدالة د، حيث د(س) = – (س – ١) (س +٢) موجبة فى الفترة ....

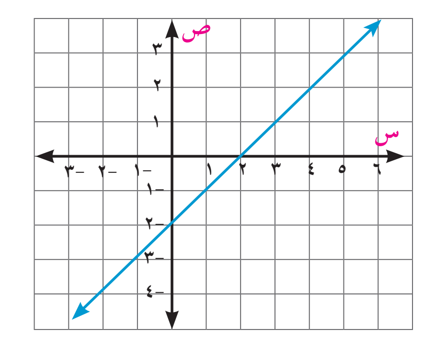
٧ الدالة د، حيث د(س) = س^٢ + ٤ س – ٥ سالبة فى الفترة ....



٨ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى فى س:

أ د(س) موجبة فى الفترة ....

ب د(س) سالبة فى الفترة ....

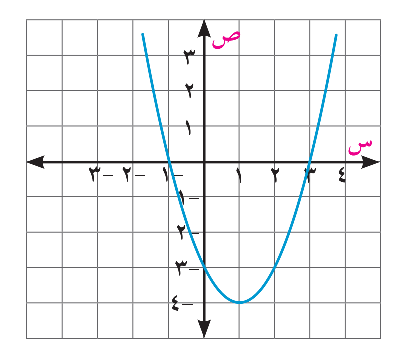


٩ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الثانية فى س:

أ د(س) = ٠ عندما س ∋ ....

ب د(س) > ٠ عندما س ∋ ....

جـ د(س) < ٠ عندما س ∋ ....



ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ فى التمارين من أ إلى ن عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٢ .... ب د(س) = ٢س ....

جـ د(س) = – ٣س .... د د(س) = ٢س+٤ ....

هـ د(س) = ٣ – ٢س .... و د(س) = س^٢ ....

ز د(س) = ٢س^٢ .... ح د(س) = س^٢ – ٤ ....

ط د(س) = ١ − س^{٢} ....

ى د(س) = (س − ٢) (س + ٣) ....

ك د(س) = (٢ س − ٣)^{٢} ....

ل د(س) = س^{٢} − س − ٢ ....

م د(س) = س^{٢} − ٨ س + ١٦ ....

ن د(س) = − ٤ س^{٢} + ١٠ س − ٢٥ ....

....

١١ ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} − ٩ فى الفترة [− ٣، ٤]، ومن الرسم عين إشارة د(س).

١٢ ارسم منحنى الدالة د(س) = − س^{٢} + ٢ س + ٤ فى الفترة [− ٣، ٥]، ومن الرسم عين إشارة د(س).

١٣ اكتشف الخطأ: إذا كانت د(س) = س + ١، ر(س) = ١ − س^{٢} فعين الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

حل يوسف

س = − ١ تجعل د(س) = ٠

د(س) موجبة فى الفترة]- ١، ∞[،

س = ± ١ تجعل ر(س) = ٠

ر(س) موجبة فى الفترة]− ١، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]- ١، ∞[∪]− ١، ١[=]− ١، ∞[

حل أميرة

س = − ١ تجعل د(س) = ٠

د(س) موجبة فى الفترة]- ١، ∞[،

س = ± ١ تجعل ر(س) = ٠

ر(س) موجبة فى الفترة]− ١، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]- ١، ∞[∩]− ١، ١[=]− ١، ١[

أى الإجابتين يكون صحيحًا؟ مثِّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا وتأكد من صحة الإجابة.

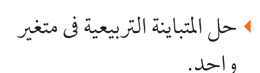
....

متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

Quadratic Inequalities

١ - ٥

سوف تتعلم



- حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينة Inequality

الأدوات والوسائل



- آلة حاسبة علمية

المتباينات التربيعية: Quadratic Inequalities



سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد؟

لاحظ أن:

س^{٢} – س – ٢ > ٠ هى متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالى

بينما د(س) = س^{٢} – س – ٢ هى الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

من الشكل المقابل نجد أن:

- مجموعة حل المتباينة
  س^{٢} – س – ٢ > ٠ فى ح
  هى]–∞ ، –١[∪]٢ ، ∞[

- مجموعة حل المتباينة
  س^{٢} – س – ٢ < ٠ فى ح
  هما]–١، ٢[





حل المتباينة التربيعية

مثال

① حل المتباينة: س^{٢} – ٥س – ٦ > ٠

الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:

خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦

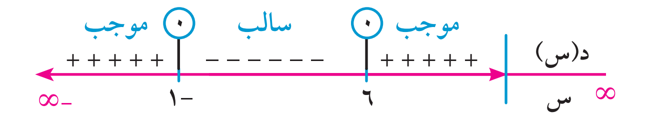
خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦ ،

ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

س = ٦ أ، س = −١



خطوة (٣): تحدد الفترات التى تحقق المتباينة س^{٢} − ٥س − ٦ > ٠



فيكون مجموعة حل المتباينة هى:]−∞، −١[∪]٦، ∞[

حاول أن تحل

(١) حل كلًا من المتباينات الآتية:

(أ) س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠ (ب) س^{٢} + س + ١٢ > ٠



أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

١) $س^{٢} \leqslant ٩$

٢) $س^{٢} - ١ \leqslant ٠$

٣) $٢س - س^{٢} < ٠$

٤) $س^{٢} + ٥ \leqslant ١$

٥) $(س - ٢)(س - ٥) < ٠$

٦) $(س - ٢)^{٢} \leqslant -٥$

٧) $س^{٢} \geqslant ٦س - ٩$

٨) $٣س^{٢} \leqslant ١١س + ٤$

٩) $س^{٢} - ٤س + ٤ \geqslant ٠$

١٠) $٧ + س^{٢} - ٤س < ٠$



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...)
- يتعرف النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على : (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- قياس زاوية Measure of an Angle
- طول Length
- مساحة Area
- ضرب تبادلى Cross Product
- طرف Extreme
- وسط Mean
- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زوايا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- بديهية Postulate/Axiom
- محيط Perimeter
- مساحة مضلع Area of polygon
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجي مشترك Common External Tangent
- مماس داخلي مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio



دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): تشابه المضلعات.

الدرس (٢ - ٢): تشابه المثلثات.

الدرس (٢ - ٣): العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس (٢ - ٤): تطبيقات التشابه فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

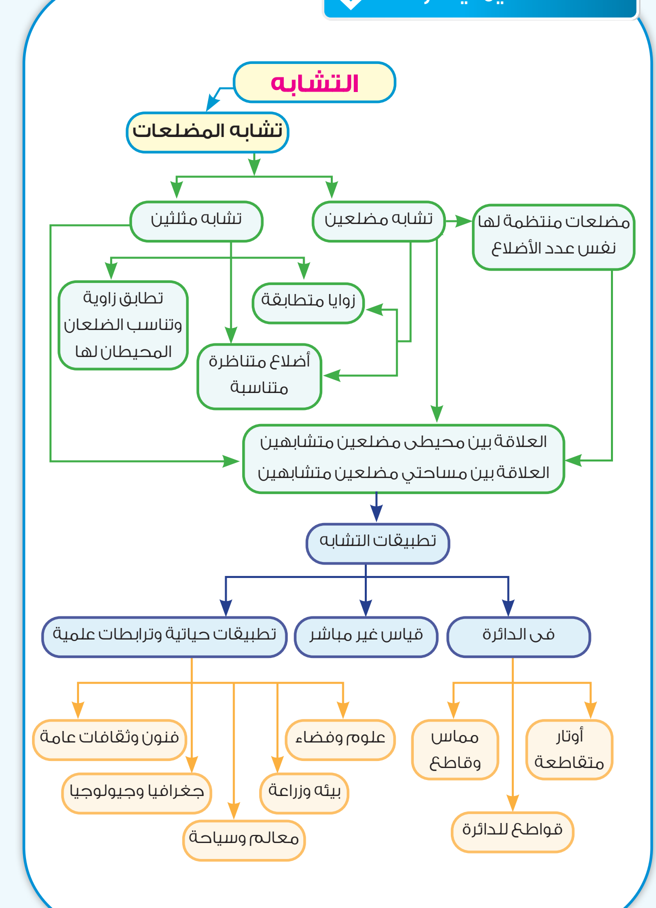
حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - مرآة مستوية - أدوات قياس - آلة حاسبة.

نبذه تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبني، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسى على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوى قياسات نظائرها فى الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح فى بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوى على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتَعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفاتفيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

مخطط تنظيمي للوحدة



٢ - ١

تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

سوف تتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- العلاقة بين محيطى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زاويا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب جـ ء وصورته أ′ ب′ جـ′ ء′ بتحويل هندسي.

أ) قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠ أ ، ∠ أ′ - ∠ ب ، ∠ ب′

∠ جـ ، ∠ جـ′ - ∠ ء ، ∠ ء′

ماذا تستنتج؟

ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة $\frac{أ′ب′}{أب}$ ، $\frac{ب′جـ′}{ب جـ}$ ، $\frac{جـ′ء′}{جـ ء}$ ، $\frac{ء′أ′}{ء أ}$

ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت فى أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

المضلعان المتشابهان Similar polygons

تعريف

«يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

لاحظ أن:

١ - فى الشكل الموضح **ببند فكر وناقش** نجد:

أ) **الزوايا المتناظرة متطابقة:** ∠ أ′ ≡ ∠ أ ، ∠ ب′ ≡ ∠ ب

∠ جـ′ ≡ ∠ جـ ، ∠ ء′ ≡ ∠ ء

ب) **الأضلاع المتناظرة متناسبة:** $\frac{أ′ب′}{أب} = \frac{ب′جـ′}{ب جـ} = \frac{جـ′ء′}{جـ ء} = \frac{ء′أ′}{ء أ}$

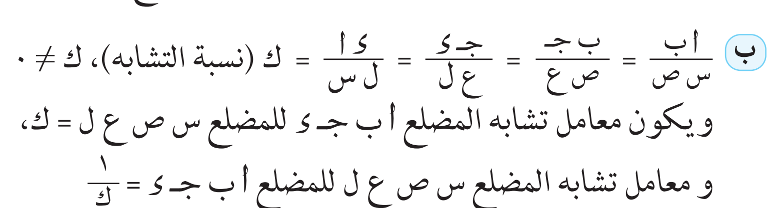
ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ′ ب′ جـ′ ء′ يشابه الشكل أ ب جـ ء

٢ - نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابة رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

إذا كان المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع س ص ع ل فإن:



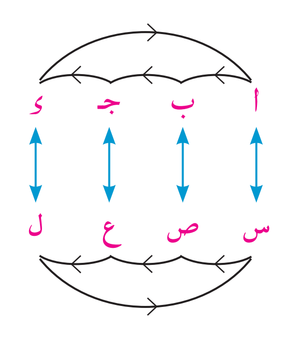
(أ) $\angle$ أ $\equiv \angle$ س ، $\angle$ ب $\equiv \angle$ ص ، $\angle$ جـ $\equiv \angle$ ع ، $\angle$ ى $\equiv \angle$ ل



(ب) $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ى أ}}{\text{ل س}} =$ ك (نسبة التشابه)، ك $\neq$ ٠

ويكون معامل تشابه المضلع أ ب جـ ى للمضلع س ص ع ل = ك،

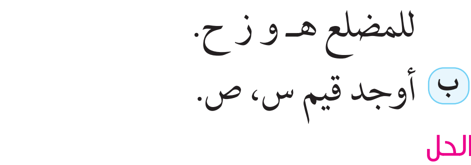
و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ ى = $\frac{١}{\text{ك}}$



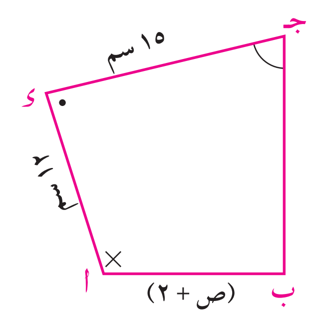
مثال

(١) فى الشكل المقابل: المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع هـ و ز ح.

(أ) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ ى للمضلع هـ و ز ح.



(ب) أوجد قيم س، ص.



الحل

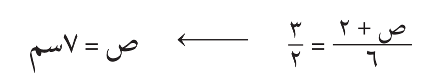
$\because$ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{ى أ}}{\text{ح هـ}} =$ معامل التشابه،

$\frac{\text{ص} + ٢}{٦} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨}$

(أ) معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

(ب) $\frac{١٥}{\text{س}} = \frac{٣}{٢} \longrightarrow$ س = ١٠سم ، $\frac{\text{ص} + ٢}{٦} = \frac{٣}{٢} \longrightarrow$ ص = ٧سم



فكر

هل جميع المربعات متشابهة؟

هل جميع المستطيلات متشابهة؟

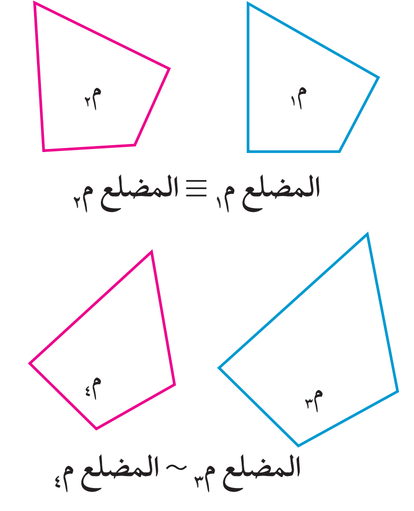
هل جميع المعينات متشابهة؟

هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

١- لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معًا، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرطا التشابه (المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساويًا (واحد) ولكن ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع $م_٣ \not\equiv$ المضلع $م_٤$) كما فى الشكل المقابل.



المضلع $م_١ \equiv$ المضلع $م_٢$

المضلع $م_٣$ ~ المضلع $م_٤$

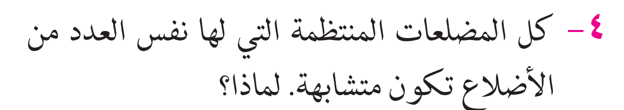


٣– المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

فإذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٣$،

المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$

فإن: المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$



٤– كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



مثال

٢ فى الشكل المقابل: △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و،

ى هـ = ٨سم ، هـ و = ٩سم ، و ى = ١٠سم

إذا كان محيط △ أ ب جـ = ٨١سم.

أوجد أطوال أضلاع △ أ ب جـ.



الحل

∵ △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و

$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}} = \frac{\text{أ ب + ب جـ + جـ أ}}{\text{ى هـ + هـ و + و ى}} = \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ى هـ و}}$$

(خواص التناسب)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{جـ أ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

∴ أ ب = $٨ \times \frac{٨١}{٢٧}$ = ٢٤سم ، ب جـ = ٩ × ٣ = ٢٧ ، جـ أ = ١٠ × ٣ = ٣٠سم

لاحظ أن:

إذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$، فإن $\frac{\text{محيط المضلع } م_١}{\text{محيط المضلع } م_٢}$ = نسبة التشابه (معامل التشابه)

معامل التشابه لمضلعين: Similarity ratio of two polygons

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$

إذا كان: ك > ١ فإن المضلع $م_١$ هو تكبير للمضلع $م_٢$

٠ < ك < ١ فإن المضلع $م_١$ هو تصغير للمضلع $م_٢$

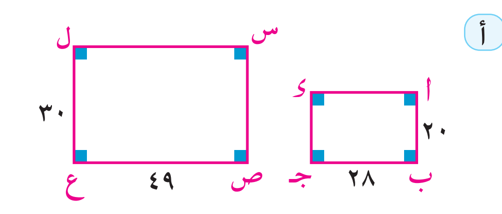
ك = ١ فإن المضلع $م_١$ يطابق المضلع $م_٢$

وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

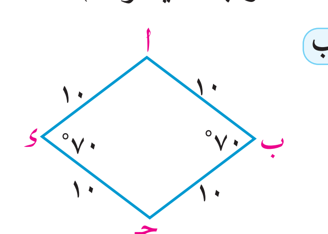
تمــاريـن ٢ - ١

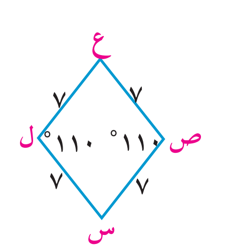
(١) بين أيًّا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات).

(أ)



(ب)

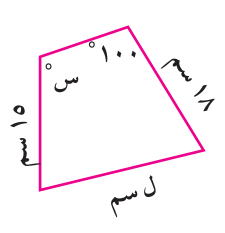


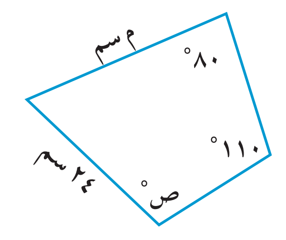


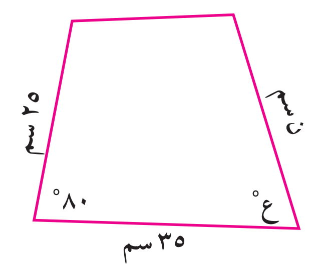
(٢) مستطيل بعداه ١٠سم، ٦سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان:

(أ) معامل التشابه ٣ (ب) معامل التشابه ٠,٤

(٣) المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم فى القياس.







(٤) مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨سم، ١٢سم، ومحيط الثانى ٢٠٠سم. أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته.

تشابه المثلثات

Similarity of Triangles



سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر فى المثلث القائم الزاوية.

المصطلحاتُ الأساسيّة

- بديهية Postulate /Axiom

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مرآة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة



طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضى طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

ثبت طاليس عصا رأسيًا وبدأ يقيس ظل العصا و يقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقى للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساويًا لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم فى أي وقت من يوم مشمس؟ فسِّر إجابتك.



١- ارسم △ أ ب جـ الذي فيه:
ق(∠أ) = ٥٠°، ق(∠ب) = ٧٠°، أ ب = ٤سم

٢- ارسم △ ء هـ و الذي فيه:
ق(∠ء) = ٥٠°، ق(∠هـ) = ٧٠°، ء هـ = ٥سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}$
هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟
قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى وا كتب ملاحظاتك.



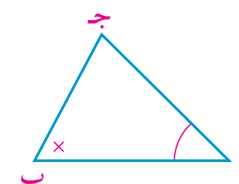
postulate (or axiom)

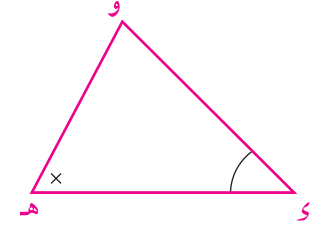
إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

فى الشكل المقابل:

إذا كان ∠ أ ≡ ∠ ى ، ∠ ب ≡ ∠ هـ

فإن △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و





لاحظ أن

١ - المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.

٢ - يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث الآخر: أو إذا تساوى قياسا زاويتي رأسيهما.

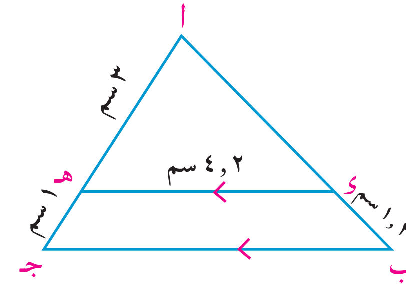
٣ - يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر.

مثال

١ فى المثلث أ ب جـ، ى ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث $\overline{ىهـ}$ // $\overline{بجـ}$،
ب ى = ١,٢سم ، أ هـ = ٣سم ، أ جـ = ٤سم ، ى هـ = ٤,٢سم.

أ أثبت أن △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ

ب أوجد طول كل من: $\overline{أى}$ ، $\overline{بجـ}$



الحل

أ ∵ $\overline{ىهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما.

∴ ∠ أ ى هـ ≡ ∠ أ ب جـ

فى المثلثين أ ى هـ ، أ ب جـ

∵ ∠ أ ى هـ ≡ ∠ أ ب جـ (برهانًا)

∠ ى أ هـ ≡ ∠ ب أ جـ (زاوية مشتركة فى المثلثين)

∴ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ (مسلمة التشابه)

ب ∵ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ

∴ $\frac{أى}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ىهـ}{بجـ}$ ويكون:

$\frac{أى}{أى + ١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{بجـ}$

٤ أ ى = ٣(أ ى + ١,٢)

٤ أ ى = ٣ أ ى + ٣,٦

أ ى = ٣,٦سم

٣ ب جـ = ٤ × ٤,٢

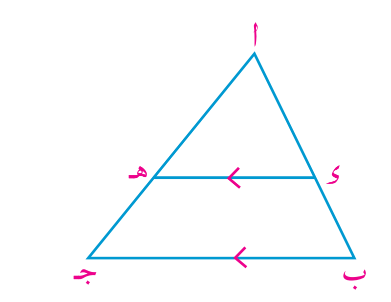
ب جـ = $\frac{٤ × ٤,٢}{٣}$

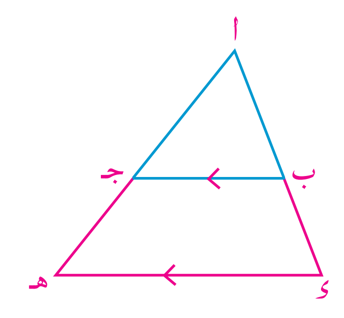
ب جـ = ٥,٦سم

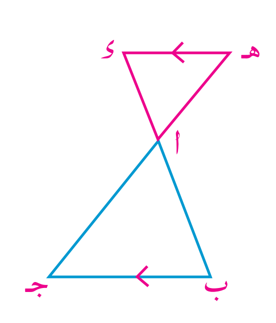
نتائج هامة



إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.







إذا كان ءهـ ⟷ // ب جـ ويقطع أب ⟷ ، أجـ ⟷ فى ء، هـ على الترتيب كما فى الأشكال الثلاثة السابقة:

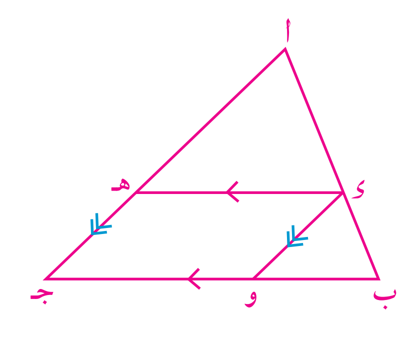
فإن: △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ.

مثال

٢ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب ، رسم ءهـ ← // ب جـ

ويقطع أجـ فى هـ، ءو ← // أجـ ويقطع ب جـ فى و.

برهن أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و



الحل

∵ ءهـ // ب جـ ∴ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ (١)

∵ ءو // أجـ ∴ △ ء ب و ~ △ أ ب جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و (وهو المطلوب)



١ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب ، رسم ءهـ ← // ب جـ ويقطع أجـ فى هـ، رسم أس ← يقطع ءهـ ، ب جـ فى س، ص على الترتيب.

أ اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

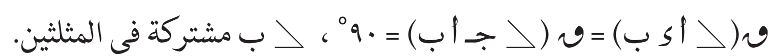
ب أثبت أن: $\frac{\text{ء س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}}$.



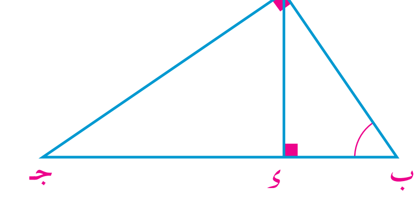
نتيجة ٢ إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$

△ ى ب أ، △ أ ب جـ فيهما



و(∠ أ ى ب) = و (∠ جـ أ ب) = ٩٠°، ∠ ب مشتركة فى المثلثين.



∴ △ ى ب أ ~ △ أ ب جـ (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل △ ى أ جـ ~ △ أ ب جـ (٢)

∵ المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

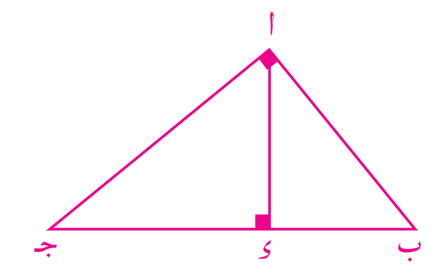
∴ △ى ب أ ~ △ى أ جـ ~ △أ ب جـ

مثال

٣ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن ى أ وسط متناسب بين ى ب، ى جـ.



الحل



المعطيات: فى △أ ب جـ: و (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن $(ى أ)^2$ = ى ب × ى جـ

البرهان: فى △أ ب جـ

∵ و (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$

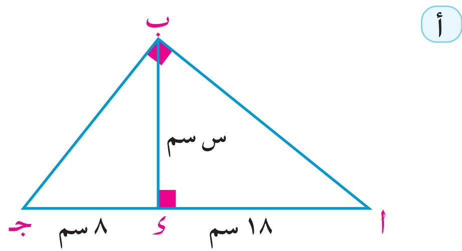
∴ △ ى ب أ ~ △ ى أ جـ (نتيجة)

ويكون: $\frac{ى أ}{ى جـ} = \frac{ى ب}{ى أ}$ أى أن $(ى أ)^2$ = ى ب × ى جـ

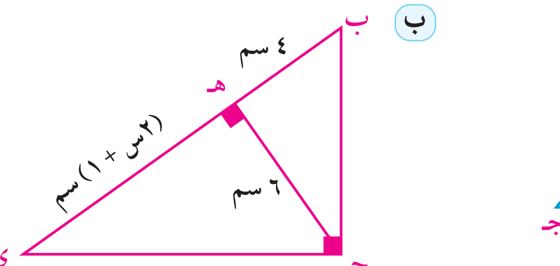
حاول أن تحل

٢ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية:

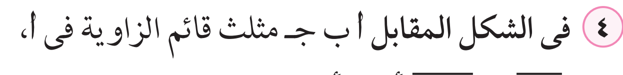
أ



ب



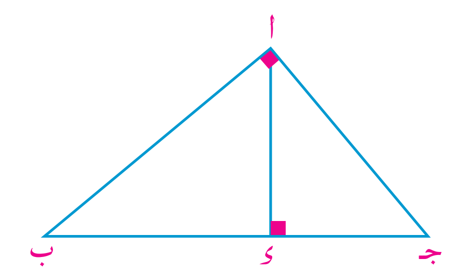
مثال

٤ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، 

$\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن:

أ) $(أ ب)^2 = ب جـ \times ب ء$

ب) $(أ جـ)^2 = جـ ب \times جـ ء$





الحل

في △ أ ب جـ:

∵ ق (∠ أ) = ٩٠°، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

∴ △ أ ب ء ~ △ جـ ب أ **(نتيجة)**

∴ $\frac{أ ب}{جـ ب} = \frac{ب ء}{ب أ}$ ويكون: $(أ ب)^2 = ب جـ \times ب ء$

، △ أ جـ ء ~ △ ب جـ أ **(نتيجة)**

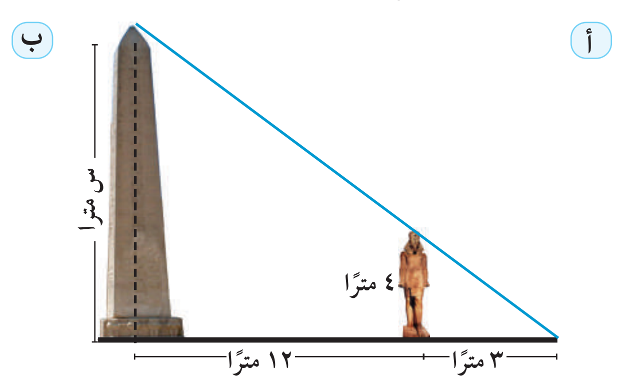
∴ $\frac{أ جـ}{ب جـ} = \frac{جـ ء}{أ جـ}$ ويكون: $(أ جـ)^2 = جـ ب \times جـ ء$

> **أضف إلى معلوماتك**
>
> تعد النتائج التي تم إثبات صحتها في مثالي ٣، ٤ برهانًا لنظرية أقليدس التي سبق لك دراستها في المرحلة الإعدادية.

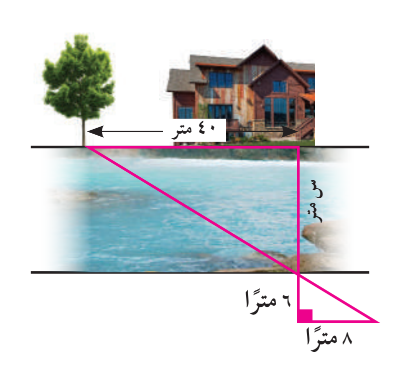
حاول أن تحل

٣ أوجد المسافة س في كل من الحالات الآتية:

أ



ب





نظرية

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

المعطيات: المثلثان أ ب جـ، ء هـ و فيهما $\frac{أ ب}{ء هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أ جـ}{ء و}$

المطلوب: △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

البرهان: عين س ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ س = ء هـ،

ارسم $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أ جـ}$ في ص.

∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ س ص **(نتيجة (١))**

أ ، ص ، س ، ب ، جـ ، ء ، و ، هـ

ويكون $\frac{\text{أب}}{\text{أس}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$

$\because$ أ س = ء هـ (عملًا)

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$ (١)

$\because \frac{\text{أب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}$ (معطيات) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: س ص = هـ و ، ص أ = و ء

ويكون △ أ س ص ≡ △ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

$\therefore$ △ ء هـ و ~ △ أ س ص

$\because$ △ أ ب جـ ~ △ أ س ص (برهانا)

$\therefore$ △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و (وهو المطلوب)

مثال

٥ فى الشكل المقابل: ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:



أ △ أ ب جـ ~ △ س ب ص

ب $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ أ ب س

س، ب، ص، جـ، أ، ٩ سم، ١٣,٥ سم، ١٨ سم، ١٢ سم، ٦ سم، ١٨ سم



الحل

أ فى المثلثين أ ب جـ، س ب ص نجد أن:

$\frac{\text{أب}}{\text{ب س}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{١٨ + ٦}{١٨} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{\text{أجـ}}{\text{س ص}} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$

ويكون $\frac{\text{أب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{س ص}}$ أى أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\therefore$ △ أ ب جـ ~ △ س ب ص

ب $\because$ △ أ ب جـ ~ △ س ب ص $\therefore$ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ س ب ص)

أي أن: $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ أ ب س

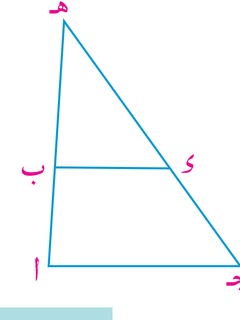
٦ في الشكل المقابل: $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ء}} = \{\text{هـ}\}$ حيث $\frac{\text{أهـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ء هـ}}$، $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} // \overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

الحل

$\because \frac{\text{أهـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ء هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}}$ (من خواص التناسب) (١)

$\because \frac{\text{أجـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أجـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}}$ (من خواص التناسب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{أهـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب ء}}$



أي أن △ ا هـ جـ ~ △ ب هـ ى

∴ ق(∠ ا جـ هـ) = ق(∠ ب ى هـ)

وهما فى وضع تناظر بالنسبة للقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$

نظرية ٢

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

المعطيات: ∠ ا ≡ ∠ ى ، $\frac{\text{ا ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ى و}}$

المطلوب: △ ا ب جـ ~ △ ى هـ و

البرهان: خذ س ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا س = ى هـ

وارسم $\overleftarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى ص

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ △ ا ب جـ ~ △ ا س ص (نتيجة) (١)

ويكون $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ص}}$

∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ى و}}$ (معطى) ، ا س = ى هـ (عملا)

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ى و}}$ ويكون ا ص = ى و

∴ △ ا س ص ≡ △ ى هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون △ ا س ص ~ △ ى هـ و (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: △ ا ب جـ ~ △ ى هـ و وهو المطلوب.

مثال

(٧) ا ب جـ مثلث، ا ب = ٨سم ، ا جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا هـ = ٢سم ، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب ى = ٤سم.

(أ) برهن أن △ ب ى هـ ~ △ ب ا جـ واستنتج طول $\overline{\text{ى هـ}}$.

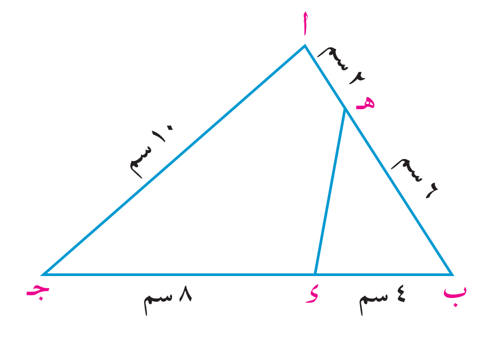
(ب) برهن أن الشكل ا جـ ى هـ رباعى دائرى.


الحل

∵ ا ب = ٨سم ، ا هـ = ٢سم ∴ ب هـ = ٦سم

(أ) المثلثان ب ى هـ ، ب ا جـ فيهما:

∠ ى ب هـ ≡ ∠ ا ب جـ (١)



، $\frac{\text{ب ى}}{\text{أ ب}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ △ ب ى هـ ~ △ ب أ جـ (نظرية)

من التشابه $\frac{\text{ى هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٢}$ ∴ ى هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ ، ى هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥سم

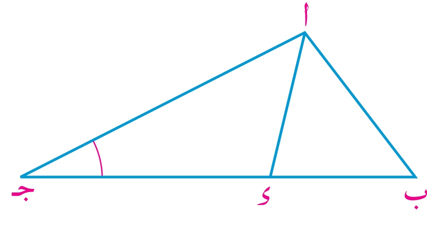
ب من التشابه أيضًا ∠ ب ى هـ ≡ ∠ ب أ جـ ∴ ق(∠ ب ى هـ) = ق(∠ ب أ جـ)

∵ ∠ ب ى هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ جـ ى هـ ∴ الشكل أ جـ ى هـ رباعي دائري.



٨ أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث (أ جـ)^{٢} = جـ ى × جـ ب أثبت أن: △ أ جـ ى ~ △ ب جـ أ

الحل



المثلثان أ ب جـ، ى أ جـ فيهما ∠ جـ مشتركة (١)

∵ (أ جـ)^{٢} = جـ ى × جـ ب

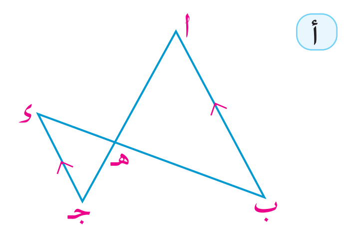
∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{أ جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن △ أ جـ ى ~ △ ب جـ أ (نظرية)

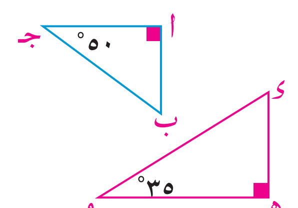
تمـــاريـن ٢ - ٢

١ اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه.

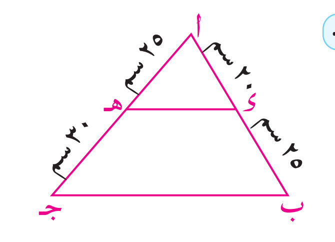
أ



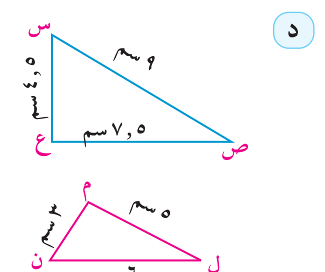
ب



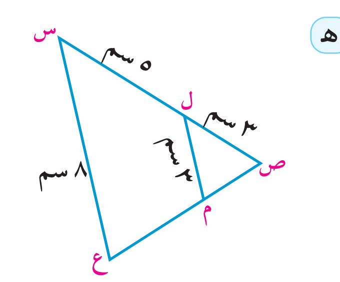
جـ



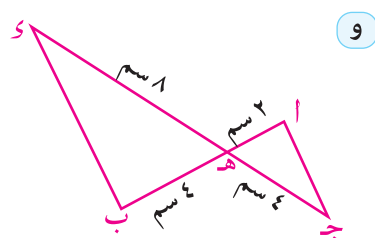
د



هـ

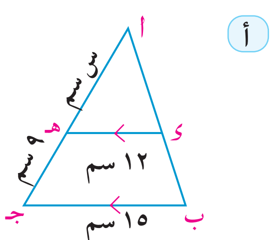


و

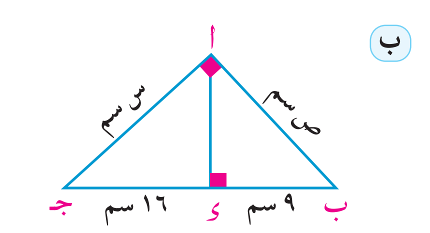


٢ أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:

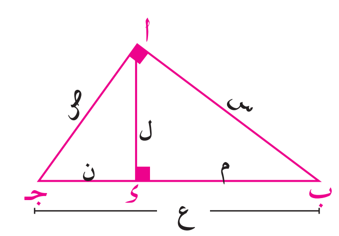
أ



ب



٣ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية $\overline{أء} \perp \overline{ب جـ}$



أولًا: أكمل: △أ ب جـ ~ △ .... ~ △ ....

ثانيًا: إذا كان س، ص، ع، ل، م، ن هى أطوال القطع المستقيمة بالسنتيمترات والمعينة بالشكل: فأكمل التناسبات التالية:

أ $\frac{س}{ع} = \frac{م}{.......}$ ب $\frac{س}{ع} = \frac{ل}{.......}$ جـ $\frac{م}{ل} = \frac{س}{.......}$ د $\frac{ل}{.......} = \frac{.......}{ل}$

هـ $\frac{س}{.......} = \frac{.......}{س}$ و $\frac{.......}{ص} = \frac{ص}{.......}$ ز $\frac{ل}{س} = \frac{.......}{ع}$ ح $\frac{ل}{س} = \frac{.......}{ص}$

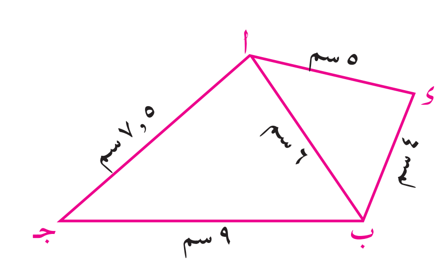
٤ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ء جـ}$ وتران فى دائرة، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{ء جـ}$ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة، أ ب = ٤سم، ء جـ = ٧سم، ب هـ = ٦سم. أثبت أن △أ ء هـ ~ △جـ ب هـ، ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$

٥ فى المثلث أ ب جـ، أ جـ > أ ب، م ∈ $\overline{أ جـ}$ حيث ق(∠أ ب م) = ق (∠جـ) أثبت أن (أ ب)^{٢} = أ م × أ جـ.

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، رسم $\overrightarrow{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ليقطعه فى ء. إذا كان $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{١}{٢}$، أ ء = ٦$\sqrt{٢}$ سم

أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$.

٧ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم ، أ جـ = ٧,٥سم ، ء نقطة خارجة عن المثلث أ ب جـ حيث ء ب = ٤سم ، ء أ = ٥سم. أثبت أن:



أ △أ ب جـ ~ △ء ب أ

ب $\overrightarrow{ب أ}$ ينصف ∠ ء ب جـ

٢ - ٣ العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

سوف تتعلم

- العلاقة بين مساحتى مثلثين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- مقياس الرسم
- العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

على ورق مربعات رسم كل من المثلثين أ ب جـ ، س ص جـ.

١ - بين لماذا يكون:

△ س ص جـ ~ △ أ ب جـ؟ أوجد معامل التشابه عندئذٍ.

٢ - احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص جـ إلى مساحة المثلث الأصلى أ ب جـ

٣- عين نقطة أخرى مثل ى $\in$ $\overline{\text{أ جـ}}$، ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ى ى}^\prime}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ و يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى′ لتحصل على المثلث ى ى′ جـ، هل △ ى ى′ جـ ~ △ س ص جـ؟

٤ - أكمل الجدول التالي:

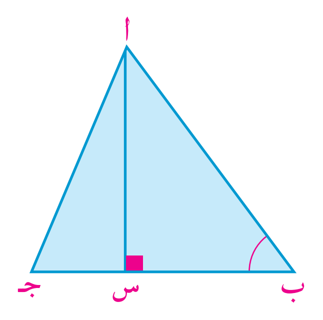
المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
△ س ص جـ ~ △ أ ب جـ	$\frac{١}{٣}$	٤	٣٦	$\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$
△ ى ى′ جـ ~ △ أ ب جـ				
△ س ص جـ ~ △ ى ى′ جـ				

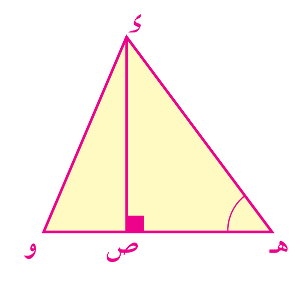
٥ - ماذا تعنى النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

أولًا: النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين:

نظرية ٣

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)





المعطيات: △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و

المطلوب: $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}\right)^{٢}$

> **لاحظ**
> الرمز م يعبر عن مساحة سطح المضلع (المثلث)

البرهان: ارسم $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{س}\}$،

$\overleftrightarrow{\text{ى ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{ى ص}} \cap \overline{\text{هـ و}} = \{\text{ص}\}$

$\because \triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$، $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \dfrac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}$ (١)

فى المثلثين أ ب س، ى هـ ص:

$\text{ق}(\angle \text{س}) = \text{ق}(\angle \text{ص}) = ٩٠^\circ$ ، $\text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$

$\therefore \triangle \text{أ ب س} \sim \triangle \text{ى هـ ص}$ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \dfrac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$ (٢)

$\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \dfrac{\frac{1}{2}\text{ب جـ} \times \text{أ س}}{\frac{1}{2}\text{هـ و} \times \text{ى ص}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} \times \dfrac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$

بالتعويض من (١)، (٢) ينتج أن:

$\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} \times \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}\right)^{٢}$ وهو المطلوب.

لاحظ أن: $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢}$ ، $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \dfrac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$

فيكون: $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}\right)^{٢}$

أى أن النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

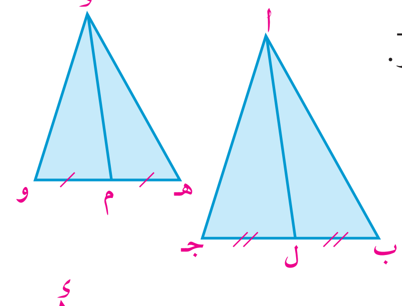
تفكير ناقد:



١- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$، ل منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$.

هل $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ ل}}{\text{ى م}}\right)^{٢}$؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.



٢- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$،

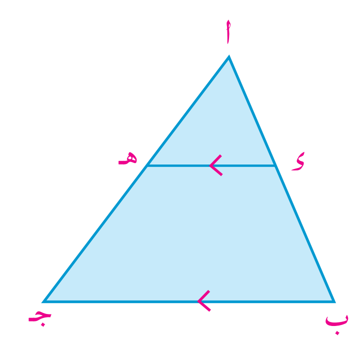
$\overrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف $\angle \text{أ}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ن،

$\overrightarrow{\text{ى ع}}$ ينصف $\angle \text{ى}$ ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع.

هل $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ ن}}{\text{ى ع}}\right)^{٢}$؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

مثال



① فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{أب}$

حيث $\frac{أى}{ى ب} = \frac{٣}{٤}$ ، $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ.

إذا كانت مساحة △ أ ب جـ =٧٨٤سم². أوجد:

أ) مساحة △ أ ى هـ.

ب) مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ.

الحل

فى △أ ب جـ: ∵ $\overline{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ (نتيجة)

∴ $\frac{م(△ أ ى هـ)}{م(△ أ ب جـ)} = \left(\frac{أ ى}{أ ب}\right)^٢$ (نظرية)

ويكون $\frac{م(△ أ ى هـ)}{٧٨٤} = \left(\frac{٣}{٧}\right)^٢$ ∴ م(△ أ ى هـ) = ٧٨٤ × $\frac{٩}{٤٩}$ = ١٤٤سم²

∵ مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ = مساحة △ أ ب جـ - مساحة △ أ ى هـ

∴ مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ = ٧٨٤ - ١٤٤ = ٦٤٠سم²

مثال

② النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و

∴ $\frac{م(△أ ب جـ)}{م(△ى هـ و)} = \left(\frac{أ ب}{ى هـ}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$ ويكون $\frac{أ ب}{ى هـ} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{محيط △ أ ب جـ}{محيط △ ى هـ و} = \frac{أ ب}{ى هـ} = \frac{٢}{٣}$

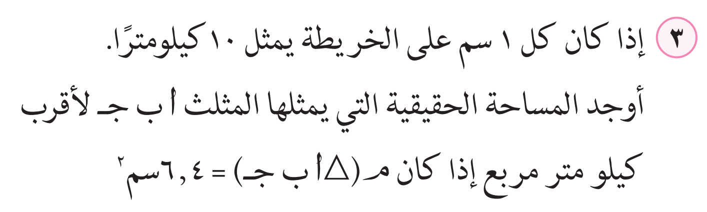
ويكون $\frac{محيط (△ أ ب جـ)}{٩٠} = \frac{٢}{٣}$ ∴ محيط △ أ ب جـ = ٦٠سم

حاول أن تحل

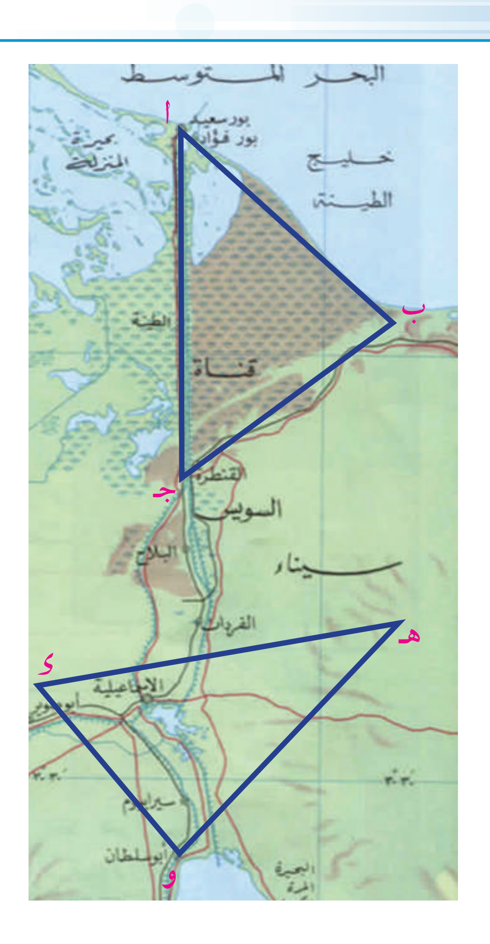
① أ ب جـ، ى هـ و مثلثان متشابهان ، $\frac{م(△أ ب جـ)}{م(△ى هـ و)} = \frac{٣}{٤}$

أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٤٥$\sqrt{٣}$ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.

ب) إذا كان هـ و = ٢٨سم أوجد طول $\overline{ب جـ}$.



مثال



(٣) إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث أ ب جـ لأقرب كيلو متر مربع إذا كان مـ(△أ ب جـ) = ٦,٤سم^{٢}

الحل

مقياس الرسم = معامل التشابه = $\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}$

$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{أ ب جـ}}{\text{المساحة الحقيقية}}$ = مربع معامل التشابه

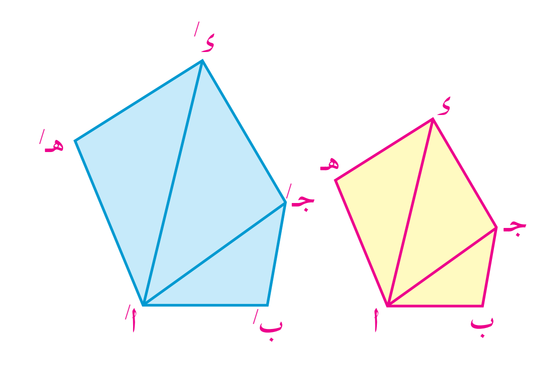
$\frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}} = \left(\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}\right)^{٢}$

المساحة الحقيقة = ٦,٤ × ١٠ × ١٠ × ١٠^{٥} × ١٠^{٥} سم^{٢}

≃ ٦٤٠ كم^{٢}

ثانيًا النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

The ratio between the area of two similar polygons



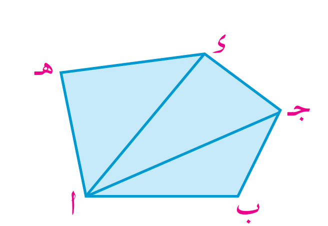
حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

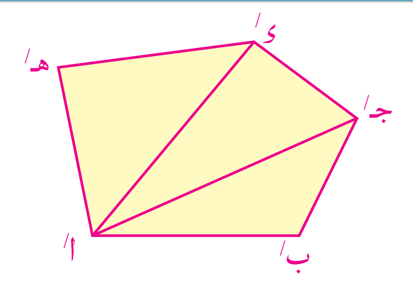
ملاحظة: الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع = ن ضلعًا فإن عدد المثلثات التى يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة فى نفس الرأس) = (ن - ٢) مثلثًا.



النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

(برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)





المعطيات: المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ هـ/

المطلوب: $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{م (المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ هـ/)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}\right)^{٢}$

البرهان: من أ ، أ/ نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ/ جـ/}}$ ، $\overline{\text{أ/ ء/}}$

∵ المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ هـ/

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره **(حقيقة)**. و يكون:

$\frac{\text{م(△ أ ب جـ)}}{\text{م(△ أ/ ب/ جـ/)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/ جـ/}}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{م(△ أ جـ ء)}}{\text{م(△ أ/ جـ/ ء/)}} = \left(\frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ/ ء/}}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ/ ء/ هـ/)}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء/ هـ/}}\right)^{٢}$

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/ جـ/}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ/ ء/}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء/ هـ/}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}$ (من تشابه المضلعين)

∴ $\frac{\text{م(△ أ ب جـ)}}{\text{م(△ أ/ ب/ جـ/)}} = \frac{\text{م(△ أ جـ ء)}}{\text{م(△ أ/ جـ/ ء/)}} = \frac{\text{م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ/ ء/ هـ/)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}\right)^{٢}$

ومن خواص التناسب

$$\frac{\text{م(△ أ ب جـ)} + \text{م(△ أ جـ ء)} + \text{م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ/ ب/ جـ/)} + \text{م(△ أ/ جـ/ ء/)} + \text{م(△ أ/ ء/ هـ/)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}\right)^{٢}$$

ويكون: $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{م (المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ هـ/)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}\right)^{٢}$ وهو المطلوب

ملاحظة

$\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ/ ب/}}\right)^{٢} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ/ ب/})^{٢}}$

حاول أن تحل

٢ أ) إذا كان المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/، $\frac{أ ب}{أ/ ب/}$ = $\frac{١}{٣}$ فاكتب ما يساويه كلٌّ من:

$\frac{م(المضلع أ ب جـ ى)}{م(المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/)}$ ، $\frac{محيط المضلع أ ب جـ ى}{محيط المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/}$

ب) إذا كان المضلعان أ ب جـ ى هـ، أ/ ب/ جـ/ ى/ هـ/ متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

فاكتب ما يساويه كل من: $\frac{أ ب}{أ/ ب/}$ ، $\frac{محيط المضلع أ ب جـ ى هـ}{محيط المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/ هـ/}$

جـ)

إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥سم٢ .أوجد مساحة المضلع الثاني.

د)

إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢سم، ١٦سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥سم٢. فإوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤ أ ب جـ ى، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: ق(∠أ) = ٤٠° ، س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ، جـ ى = ١٦سم.

احسب: **أولًا:** ق(∠س) **ثانيًا:** طول $\overline{ع ل}$ **ثالثًا:** م(المضلع أ ب جـ ى) : م(المضلع س ص ع ل)

الحل

∵ المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠أ) = ق(∠س) فيكون ق(∠س) = ٤٠° **(المطلوب أولًا)**

∵ س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ∴ $\frac{أ ب}{س ص}$ = $\frac{٤}{٣}$ **(من خواص التناسب)**

من تشابه المضلعين نجد أيضًا $\frac{أ ب}{س ص}$ = $\frac{جـ ى}{ع ل}$

∴ $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{١٦}{ع ل}$ فيكون ع ل = $\frac{٣ \times ١٦}{٤}$ = ١٢سم **(المطلوب ثانيًا)**

م(المضلع أ ب جـ ى) : م (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)٢ : (س ص)٢

= ١٦ك٢ : ٩ك٢

١٦ : ٩ **(المطلوب ثالثًا)**

> **لاحظ أن**
> أ ب = ٤ك
> س ص = ٣ك
> ك ≠ ٠

مثال

٥ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤. إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥سم^{٢} فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

∵ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٣ : ٤

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٤

بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩س سم^{٢} ، مساحة المضلع الثاني = ١٦س سم^{٢}

∴ ٩س + ١٦س = ٢٢٥ ويكون س = $\frac{٢٢٥}{٩ + ١٦}$ = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ٩ = ٨١ سم^{٢}

∴ مساحة المضلع الثاني = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم^{٢}

حاول أن تحل

٣ **الربط مع الزراعة:** مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ ، إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدانًا، فأوجد مساحة كل منهما.



١ أكمل:

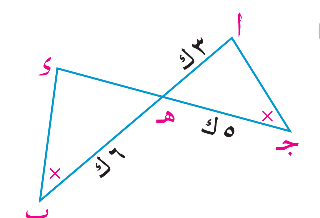
أ إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δس ص ع، وكان أ ب = ٣ س ص فإن $\frac{\text{م (Δس ص ع)}}{\text{م (Δ أ ب جـ)}}$ = ...

ب إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ ى هـ و، م (Δ أ ب جـ) = ٩ م(Δ ى هـ و) وكان ى هـ = ٤سم فإن:

أ ب = ... سم

٢ ادرس كلًّا من الأشكال التالية، حيث ك ثابت تناسب، ثم أكمل:

أ

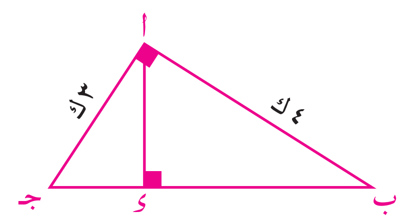


$\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}

م(Δ أ جـ هـ) = ٩٠٠ سم^2

فإن: م(Δ ى هـ ب) = ... سم^2

ب



ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°، $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

م(Δ أ ى جـ) = ١٨٠ سم^2 فإن:

م(Δ أ ب جـ) = ... سم^2

٣ أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ ى = ٢ ب ى، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$
إذا كانت مساحة Δ أ ى هـ = ٦٠سم^2. أوجد مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ.

٤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س، ب جـ ص، أ جـ ع
أثبت أن: م (Δأ ب س) + م (Δب جـ ص) = م (Δأ جـ ع).

٥ أ ب جـ مثلث فيه $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٤}{٣}$، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى هـ. أثبت أن: $\frac{\text{م (Δ أ ب جـ)}}{\text{م (Δ أ ب هـ)}}$ = $\frac{٧}{١٦}$

٦ أ ب جـ ى متوازى أضلاع س ∈ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$، س ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ب س = ٢ أ ب، ص ∈ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$، ص ∉ $\overline{\text{جـ ب}}$
حيث ب ص = ٢ ب جـ ، رسم متوازى الأضلاع ب س ع ص أثبت أن: $\frac{\text{م (أ ب جـ ى)}}{\text{م (س ب ص ع)}}$ = $\frac{١}{٤}$

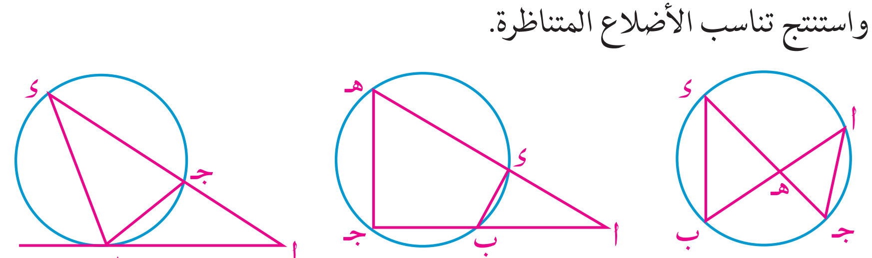
٢ - ٤

تطبيقات التشابه فى الدائرة

Applications of Similarity in the circle

فكر و ناقش

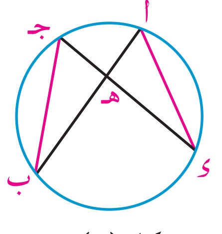
فى كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.



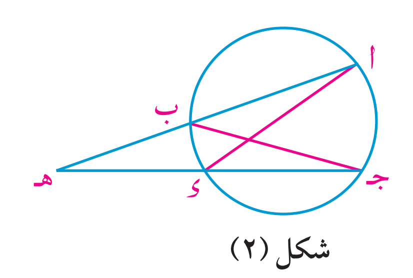
- فى شكل (١): هل توجد علاقة بين هـ أ × هـ ب ، هـ جـ × هـ ى؟
- فى شكل (٢): هل توجد علاقة بين أ هـ × أ ى ، أ جـ × أ ب؟
- فى شكل (٣): هل توجد علاقة بين أ ى × أ جـ ، (أ ب)^{٢}؟

تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن:
هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى



شكل (١)



شكل (٢)

لاستنتاج ذلك:

- ارسم $\overline{\text{أ ى}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$
- فى كل من الشكلين أثبت أن المثلثين هـ أ ى ، هـ جـ ب متشابهان فيكون:

$$\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}} \qquad \therefore \text{هـ أ} \times \text{هـ ب} = \text{هـ جـ} \times \text{هـ ى}$$

سوف تتعلم

- العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطولى جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

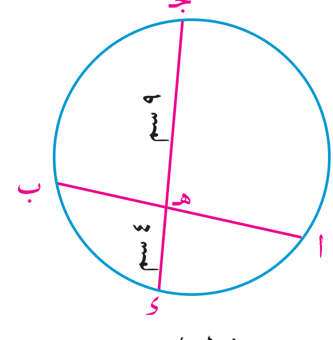
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles

مثال

① فى الشكل المقابل: $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$

وإذا كان $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$، هـ جـ = ٩سم ، هـ ى = ٤سم

أوجد طول $\overline{هـ ب}$



الحل

∵ $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ أ = ٤ك ، هـ ب = ٣ك حيث ك ≠ ٠

∵ $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى **(تمرين مشهور)**

فيكون: ٤ك × ٣ك = ٩ × ٤

$١٢ك^٢ = ٣٦$

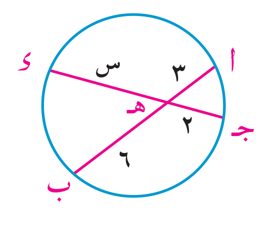
$ك^٢ = ٣$

ك = $\sqrt{٣}$ ، هـ ب = $٣\sqrt{٣}$ سم

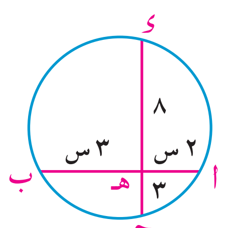
حاول أن تحل

① أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

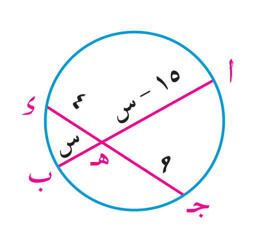
أ



ب



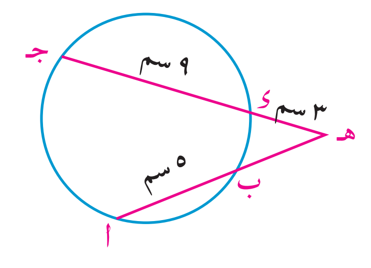
جـ

مثال

② فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$، أب = ٥سم،

جـ ى = ٩سم ، هـ ى = ٣سم. أوجد طول $\overline{ب هـ}$



الحل

بفرض أن ب هـ = س سم.

∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$ ∴ هـ ب × هـ أ = هـ ى × هـ جـ **(تمرين مشهور)**

فيكون: س (س + ٥) = ٣ (٣ + ٩)

$س^٢ + ٥س - ٣٦ = صفر$

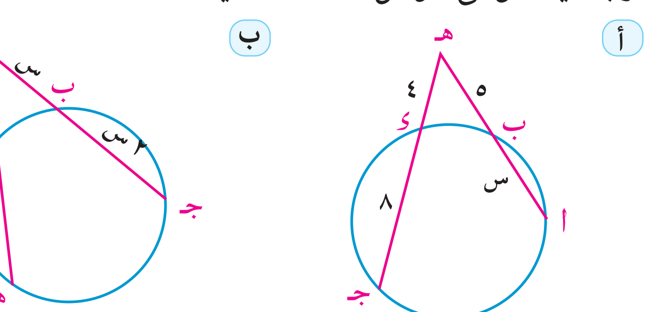
(س - ٤) (س + ٩) = صفر

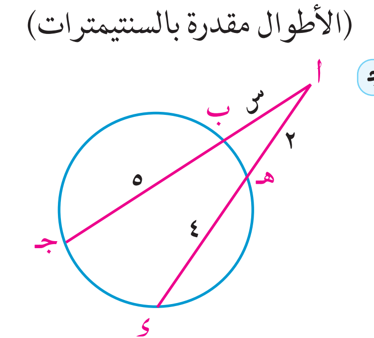
∴ س = ٤ ، س = -٩ مرفوض

∴ طول $\overline{ب هـ}$ = ٤سم.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)





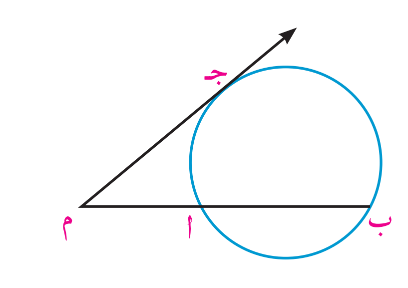
نتيجة ١

إذا كانت م نقطة خارج دائرة، $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ يمس الدائرة فى جـ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ يقطعها فى أ ، ب فإن (م جـ)^2 = م أ × م ب.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ مماس للدائرة

، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ يقطع الدائرة فى أ، ب

∴ (م جـ)^2 = م أ × م ب

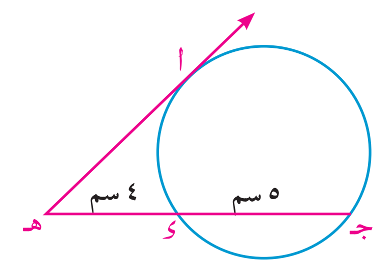


مثال

٣ فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{هـ أ}}$ مماس للدائرة،

$\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ يقطع الدائرة فى ى، جـ على الترتيب.

حيث هـ ى = ٤سم ، جـ ى = ٥سم ، أوجد طول $\overline{\text{هـ أ}}$



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ أ}}$ مماس، $\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ قاطع للدائرة

∴ (هـ أ)^2 = هـ ى × هـ جـ (نتيجة)

(هـ أ)^2 = ٤(٤ + ٥) = ٣٦

∴ هـ أ = ٦سم

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ فى نقطة هـ (مختلفة عن أ، ب، جـ، ى)
وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى فإن : النقط أ، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

لاحظ أن:

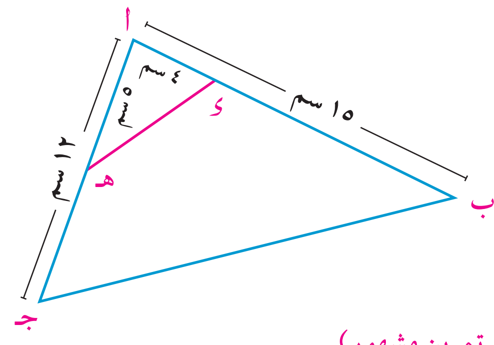
هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

فيكون $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}}$

- هل △ هـ أ ى ~ △ هـ جـ ب؟ لماذا؟
- هل ق (∠ أ) = ق (∠ جـ)؟ لماذا؟
- هل النقط أ، ى، ب، جـ تقع على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.



④ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم. ى ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ ى = ٤سم، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث أ هـ = ٥سم.
أثبت أن الشكل ى ب جـ هـ رباعي دائرى.



الحل

∵ أ ى × أ ب = ٤ × ١٥ = ٦٠،

أ هـ × أ جـ = ٥ × ١٢ = ٦٠

∴ أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

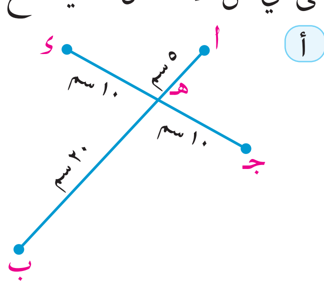
∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = {أ} ، أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

∴ النقط ى، ب جـ، هـ تقع على دائرة واحدة (عكس تمرين مشهور)

ويكون الشكل ى ب جـ هـ رباعيًا دائريًا

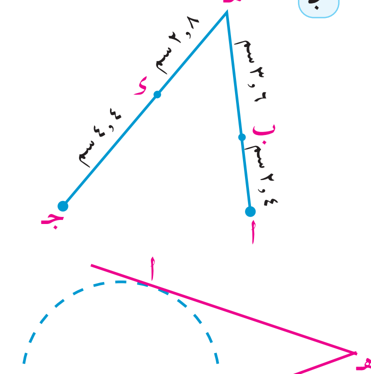
حاول أن تحل

③ فى أيٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ى على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



ب

ج

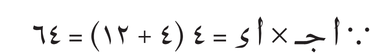


> **نتيجة ٢**
>
> إذا كان (هـ أ)^2 = هـ ب × هـ جـ
>
> فإن $\overline{\text{هـ أ}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط أ، ب، جـ

مثال

⑤ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٤سم، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$، ء ∉ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث جـ ء = ١٢سم.
أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء


الحل



∵ أ جـ × أ ء = ٤ (٤ + ١٢) = ٦٤

، (أ ب)^{٢} = (٨)^{٢} = ٦٤

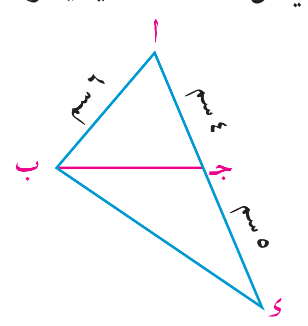
∴ (أ ب)^{٢} = أ جـ × أ ء

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء عند النقطة ب.

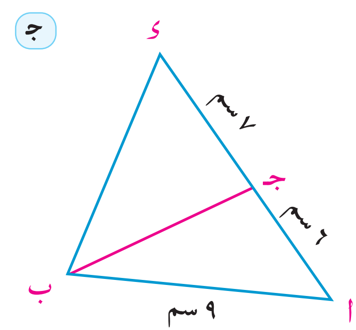
حاول أن تحل

④ في أيٍّ من الأشكال الآتية يكون $\overline{\text{أ ب}}$ مماسًا للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء

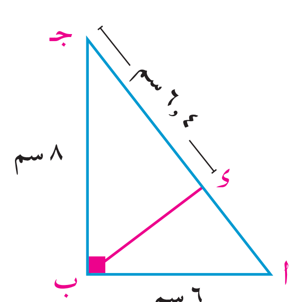
أ



ب



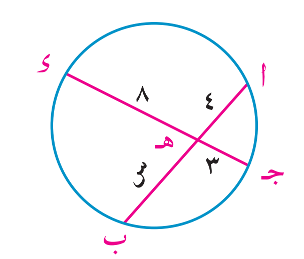
جـ



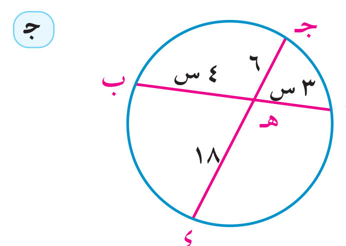
تمـــاريـن ٢ - ٤

① باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلى، أوجد قيمة س العددية فى كل من الأشكال التالية.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

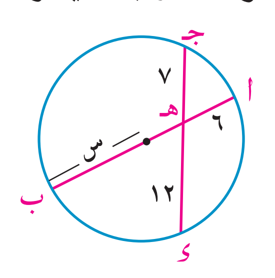
أ



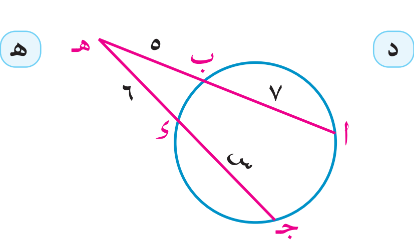
ب



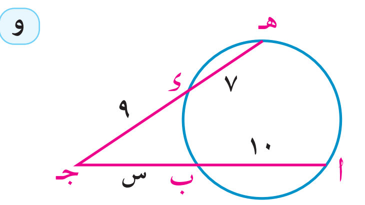
جـ



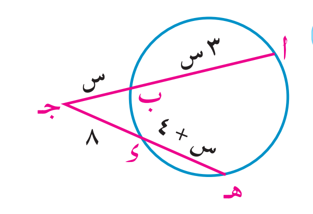
د



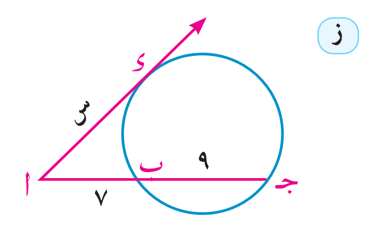
هـ



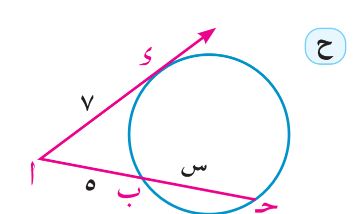
و



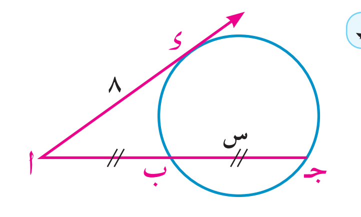
ز



ح

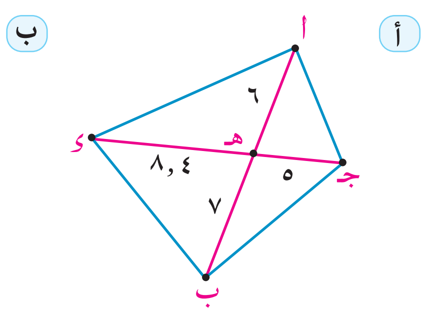


ط

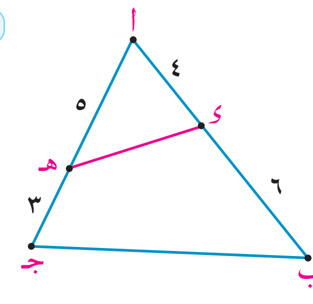


② فى أىٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ء على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

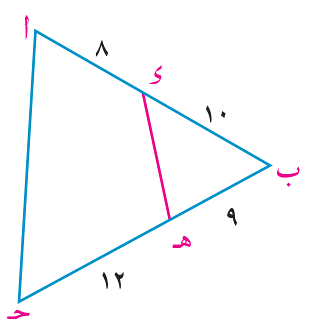
أ



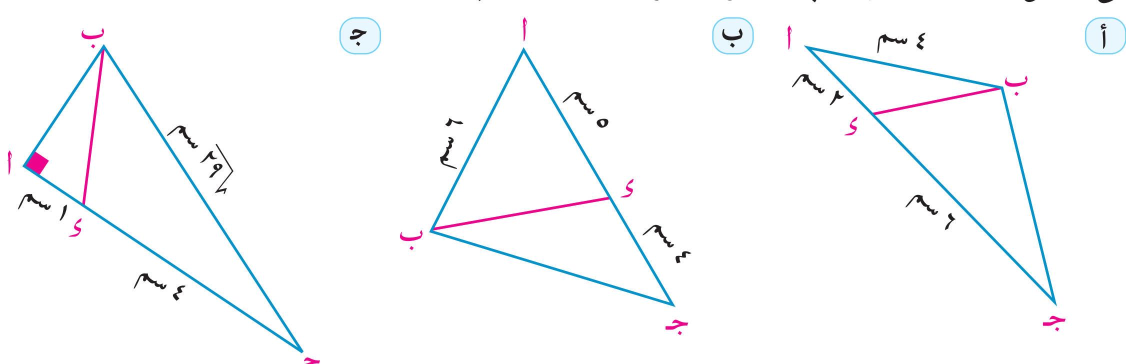
ب



جـ

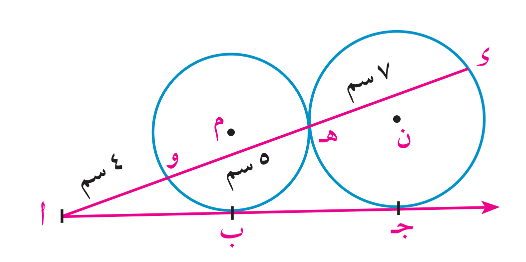


(٣) في أيٍّ من الأشكال التالية $\overline{اب}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ى.

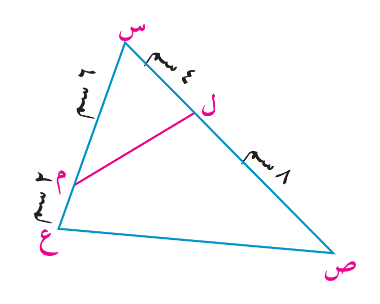


(٤) دائرتان متقاطعتان في ا، ب . جـ ∈ $\overleftrightarrow{اب}$ ، جـ ∉ $\overline{اب}$ رُسِمَ من جـ القطعتان $\overline{جـ س}$، $\overline{جـ ص}$ مماستان للدائرتين عند س، ص. أثبت أن جـ س = جـ ص.

(٥) في **الشكل المقابل**: الدائرتان م، ن متماستان عند هـ
$\overrightarrow{اجـ}$ يمس الدائرة م عند ب، و يمس الدائرة ن عند جـ،
$\overrightarrow{اهـ}$ يقطع الدائرتين عند و، ى على الترتيب
حيث ا و = ٤سم، و هـ = ٥سم، هـ ى = ٧سم.
أثبت أن ب منتصف $\overline{اجـ}$



(٦) في **الشكل المقابل**: ل ∈ $\overline{س ص}$ حيث س ل = ٤سم،
ص ل = ٨سم ، م ∈ $\overline{س ع}$ حيث س م = ٦سم ، ع م = ٢سم
أثبت أن:
(أ) △س ل م ~ △س ع ص
(ب) الشكل ل ص ع م رباعي دائري.



(٧) $\overline{اب}$ ∩ $\overline{جـ ى}$ = {هـ}، ا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ، ى هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ جـ، إذا كان ب هـ = ٦سم، جـ هـ = ٥سم.
أثبت أن النقط ا، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

(٨) ا ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ى ب = ٥سم، ى جـ = ٤سم. إذا كان ا جـ = ٦سم. أثبت أن:
(أ) $\overline{اجـ}$ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط ا، ب، ى.
(ب) △ا جـ ى ~ △ب جـ ا
(جـ) م (△ا ب ى) : م (△ا ب جـ) = ٥ : ٩

(٩) دائرتان متحدتا المركز م، طولا نصفي قطريهما ١٢سم، ٧سم، رسم الوتر $\overline{اى}$ في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، جـ على الترتيب. أثبت أن: ا ب × ب ى = ٩٥



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.) وحالات خاصة منها.
- يتعرف النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- يوازي Parallel
- نقطة تنصيف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal
- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى على Perpendicular



دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ - ٢): منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الأدوات المستخدمة

أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلي - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات - خيوط - مقص

نبذه تاريخية

الرياضيات نشاط فكرى ممتع يجعل الذهن متفتحًا، والعقل صحوًا، وتُسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية ، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حرثوا الأراضى الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاما هندسيًّا متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازى وهى:"من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازى مستقيمًا معلومًا". وتُعْنى الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات - المضلعات - الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

مخطط تنظيمي للوحدة

نظريات التناسب
- التناسب فى المثلث
  - مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث
  - المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية مثلث
- نظرية تاليس العامة

تطبيقات حياتية وترابطات علمية
- قياسات غير مباشرة
- علوم وفضاء
- بيئة وزراعة
- جغرافيا وجيولوجيا
- فنون وثقافات عامة

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

٣ - ١

سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيمات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمات المتوازية وقواطعها.

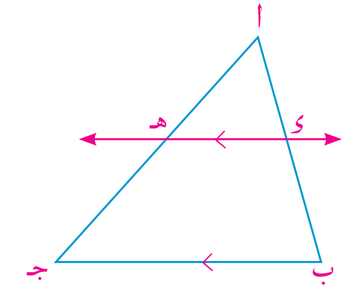
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- يوازى Parallel
- منتصف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.





١- ارسم المثلث أ ب جـ، عين نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$
ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ.

٢- أوجد بالقياس طول كل من:
$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

٣- احسب النسبتين $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

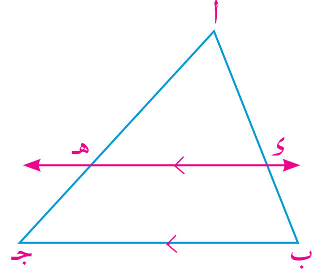
إذا تغير موقع $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{ب جـ}}$.

هل تتغير العلاقة بين $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$؟ ماذا نستنتج؟



إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

(برهان النظرية لايمتحن فيه الطالب)



المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △أ ب جـ ~ △أ ء هـ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ (١)

∵ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ أ ب = أ ء + ء ب ، أ جـ = أ هـ + هـ جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{\text{أ ء} + \text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ} + \text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$$

ويكون: $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ء}} + \frac{\text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ}} + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

$1 + \frac{ى ب}{أ ى} = 1 + \frac{هـ جـ}{أ هـ}$

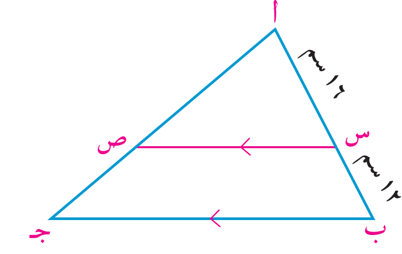
$\therefore \frac{ى ب}{أ ى} = \frac{هـ جـ}{أ هـ}$

ومن خواص التناسب نجد أن: $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن: $\because \frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ $\quad \therefore \frac{أ ى + ى ب}{ى ب} = \frac{أ هـ + هـ جـ}{هـ جـ}$

أي أن: $\frac{أ ب}{ى ب} = \frac{أ جـ}{هـ جـ}$

مثال



(١) في الشكل المقابل: $\overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$، أ س = ١٦سم، ب س = ١٢سم.

(أ) إذا كان أ ص = ٢٤سم، أوجد ص جـ.

(ب) إذا كان جـ ص = ٢١سم، أوجد أ جـ.

الحل

(أ) $\because \overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$ $\quad \therefore \frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص جـ}$

ويكون: $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص جـ}$ $\quad \therefore$ ص جـ = $\frac{١٢ \times ٢٤}{١٦}$ = ١٨سم.

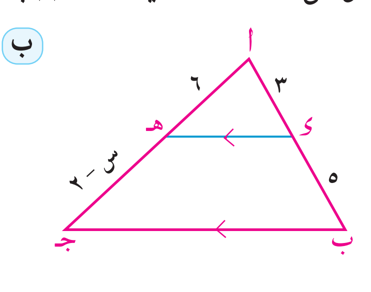
(ب) $\because \overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$ $\quad \therefore \frac{أ ب}{ب س} = \frac{أ جـ}{جـ ص}$

ويكون: $\frac{١٦ + ١٢}{١٢} = \frac{أ جـ}{٢١}$ $\quad \therefore$ أ جـ = $\frac{٢٨ \times ٢١}{١٢}$ = ٤٩سم.

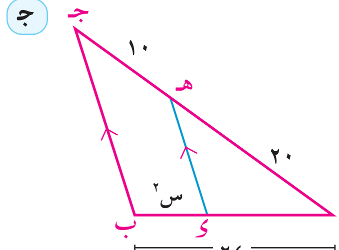
حاول أن تحل

(١) في كل من الأشكال التالية: $\overline{ى هـ} \parallel \overline{ب جـ}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

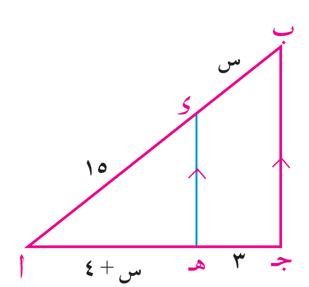
(أ)



(ب)

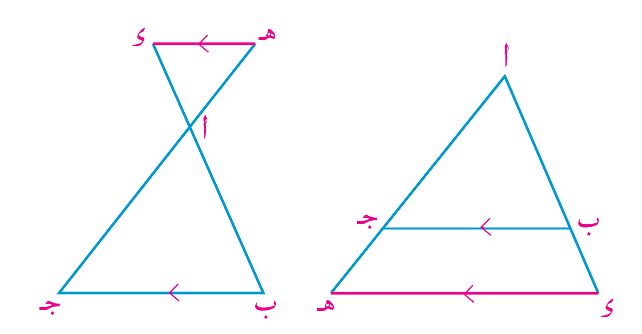


(جـ)





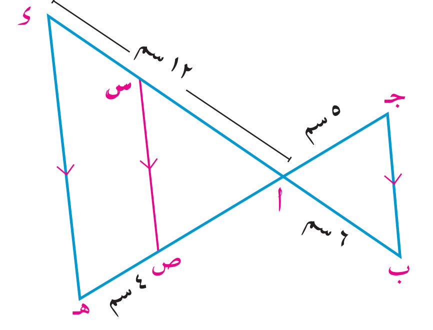
إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث، وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$، ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى ى، هـ على الترتيب فإن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (كما فى الشكل).



بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$\frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{أ ى}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}}$

مثال



٢ فى الشكل المقابل: $\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب ى}} = \{\text{أ}\}$، س $\in \overline{\text{أ ى}}$

ص $\in \overline{\text{أ هـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{هـ ى}}$.

فإذا كان أ ب = ٦سم، أ جـ = ٥سم، أ ى = ١٢سم، هـ ص = ٤سم.

أوجد طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ى س}}$.

الحل

$\because \overline{\text{هـ ى}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب ى}} = \{\text{أ}\}$

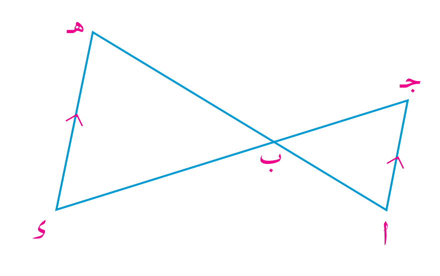
$\therefore \frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ويكون: $\frac{١٢}{٦} = \frac{\text{أ هـ}}{٥}$ $\therefore$ أ هـ = ١٠سم

فى $\triangle$ أ هـ ى:

$\because \overline{\text{س ص}} \,//\, \overline{\text{هـ ى}}$ $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى س}}$

ويكون $\frac{١٠}{٤} = \frac{١٢}{\text{ى س}}$ $\therefore$ ى س = ٤,٨سم

حاول أن تحل



٢ فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ى هـ}} \,//\, \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}} \cap \overline{\text{جـ ى}} = \{\text{ب}\}$

أ إذا كان: أ ب = ٨سم، ب جـ = ٩سم، ب هـ = ١٢سم.

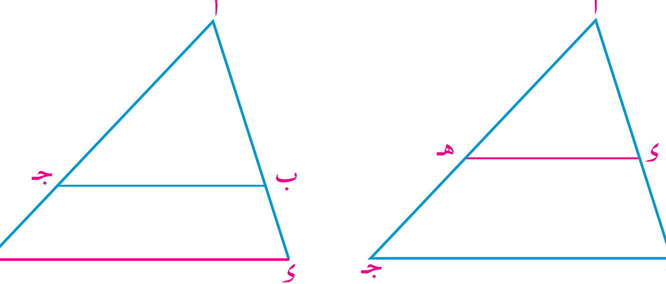
أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$.

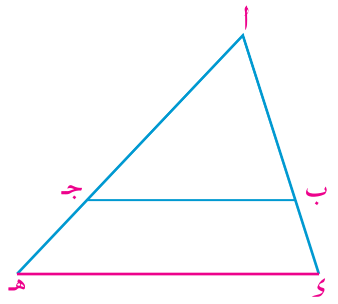
ب إذا كان: أ ب = ٦سم، ب هـ = ٩سم، جـ ى = ١٨سم.

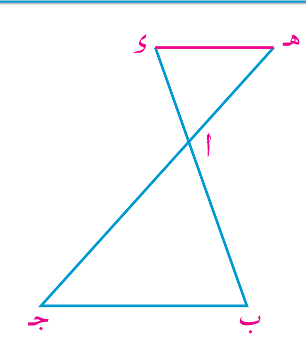
أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

عكس نظرية ١

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.





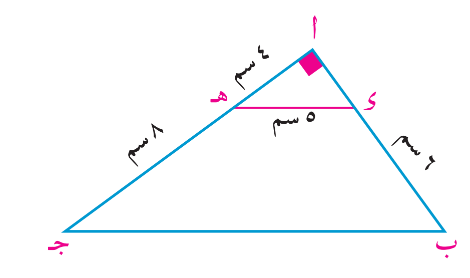


فى الأشكال الثلاثة السابقة: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{ى هـ}$ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ فى ى، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ فى هـ وكان $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$

فإن $\overleftrightarrow{ى هـ} \,//\, \overleftrightarrow{ب جـ}$

تفكير منطقى: هل △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ؟ ولماذا؟ - هل ∠ أ ى هـ ≡ ∠ ب ؟ فسر إجابتك.

مثال



③ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

(أ) أثبت أن: $\overline{ى هـ} \,//\, \overline{ب جـ}$. (ب) أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

الحل

(أ) ∵ المثلث أ ى هـ قائم الزاوية فى أ

∴ أ ى = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣سم **(نظرية فيثاغورث)**

∵ $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ ويكون $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$.

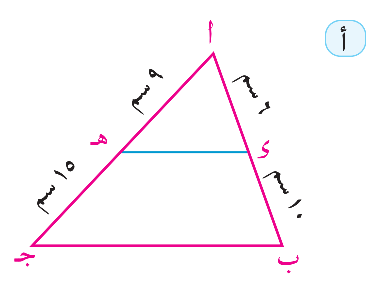
(ب) ∵ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ (لماذا) ∴ $\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{ى هـ}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$

ويكون $\frac{٥}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$ ∴ ب جـ = ١٥سم

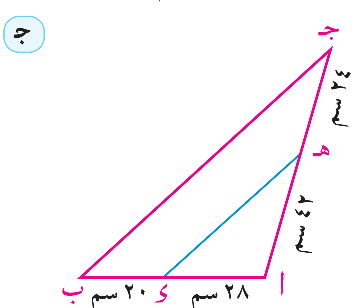
حاول أن تحل

(٣) فى كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان $\overline{\text{ى هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$ أم لا.

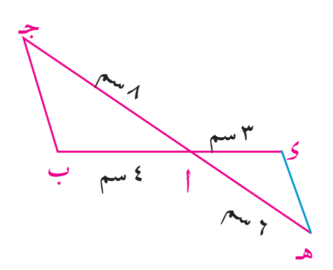
(أ)



(ب)



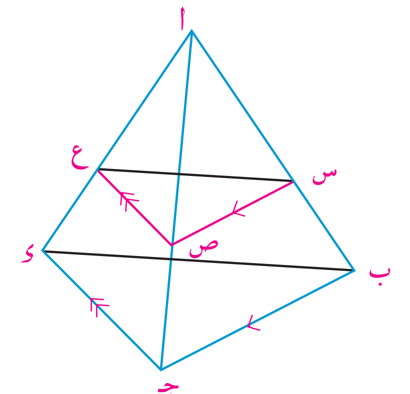
(جـ)



مثال

(٤) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$،

رسم $\overleftrightarrow{\text{ص ع}} // \overline{\text{جـ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ى}}$ فى ع. أثبت أن $\overline{\text{س ع}} // \overline{\text{ب ى}}$.



الحل

فى △ أ ب جـ:

∵ $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (١)

فى △ أ ى جـ:

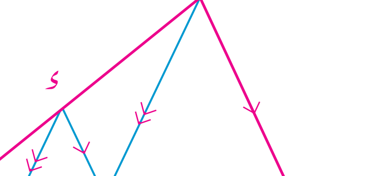
∵ $\overline{\text{ص ع}} // \overline{\text{جـ ى}}$ ∴ $\frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن: $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}}$

فى △ أ ب ى:

∵ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}}$ ∴ $\overline{\text{س ع}} // \overline{\text{ب ى}}$

حاول أن تحل

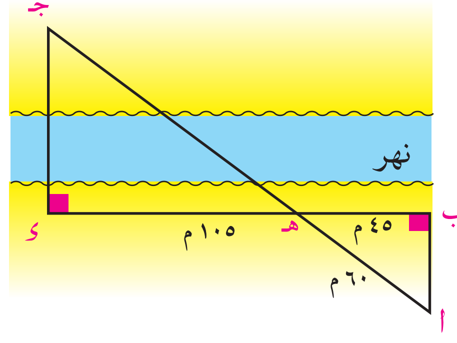


(٤) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$،

$\overline{\text{ى هـ}} // \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ى و}} // \overline{\text{أ هـ}}$

إثبت أن $(\text{جـ هـ})^2 = \text{جـ و} \times \text{جـ ب}$.





٥ **تحديد المواقع:** لتحديد الموقع جـ، قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع جـ عن الموقع أ

الحل

$\overline{أب} \perp \overline{بء}$، $\overline{جـء} \perp \overline{بء}$ ∴ $\overline{أب} \,//\, \overline{جـء}$

∵ $\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{هـ\}$ ، $\overline{أب} \,//\, \overline{جـء}$

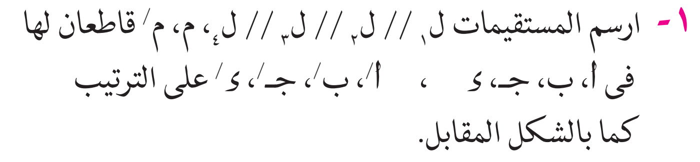
∴ $\frac{هـأ}{أجـ} = \frac{هـب}{بء}$ ويكون $\frac{٦٠}{أجـ} = \frac{٤٥}{٤٥+١٠٥}$

∴ أجـ $= \frac{٦٠ \times ١٥٠}{٤٥} = ٢٠٠$ متر.





٥ **مكافحة التلوث:** قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطئ كما فى الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.



لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازى مستقيم لأحد أضلاع مثلث فى تطبيقات حياتية كثيرة.

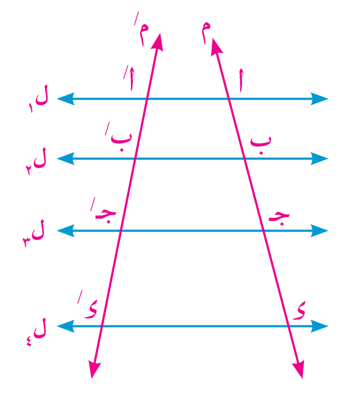
يوضح الشكل المقابل بوابة أحد المشاتل الزراعية، وهى مكونه من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها.

هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟

نمذجة

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجًا رياضيًّا للمشكلة) كما يلى:

١- ارسم المستقيمات $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$، م، م/ قاطعان لها فى أ، ب، جـ، ء ، أ/، ب/، جـ/، ء/ على الترتيب كما بالشكل المقابل.



٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

$\frac{أب}{أ/ب/}$ ، $\frac{بجـ}{ب/جـ/}$ ، $\frac{جـء}{جـ/ء/}$ ، $\frac{أجـ}{أ/جـ/}$ ، ....

ماذا نستنتج؟

نظرية تاليس العامة — Talis' Theorem

نظرية ٢

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)

المعطيات: ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م، م′ قاطعان لها

المطلوب: أب : ب جـ : جـ ى = أ′ب′ : ب′جـ′ : جـ′ى′

البرهان: ارسم ←أو // م′، ويقطع ل٢ فى هـ ، ل٣ فى و،
←ب ص // م′، ويقطع ل٣ فى س، ل٤ فى ص.

∵ أأ′ // هـ ب′ ، أهـ // أ′ب′

∴ أ هـ ب′ أ′ متوازى أضلاع ويكون: أ هـ = أ′ب′

بالمثل: هـ و = ب′جـ′ ، ب س = ب′جـ′ ، س ص = جـ′ى′

فى △ أ جـ و:

∵ ب هـ // جـ و ∴ أب/ب جـ = أهـ/هـ و

ويكون: أب/ب جـ = أ′ب′/ب′جـ′ ، أب/أ′ب′ = ب جـ/ب′جـ′ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل △ ب ى ص:

∴ ب جـ/جـ ى = ب′جـ′/جـ′ى′ ، ب جـ/ب′جـ′ = جـ ى/جـ′ى′ (إبدال الوسطين) (٢)

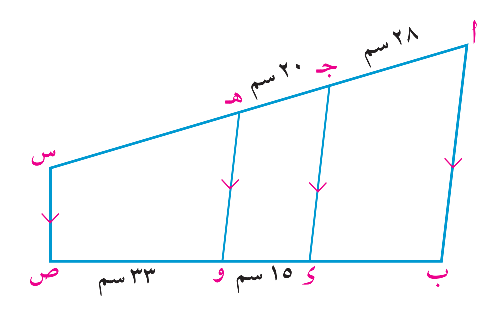
من (١)، (٢) ينتج أن:

أب/أ′ب′ = ب جـ/ب′جـ′ = جـ ى/جـ′ى′

∴ أب : ب جـ : جـ ى = أ′ب′ : ب′جـ′ : جـ′ى′ وهو المطلوب.

مثال

٦ فى الشكل المقابل: أب // جـ ى // هـ و // س ص ،
أ جـ = ٢٨سم، جـ هـ = ٢٠سم، ى و = ١٥سم، و ص = ٣٣سم.
أوجد طول كل من: ب ى ، هـ س



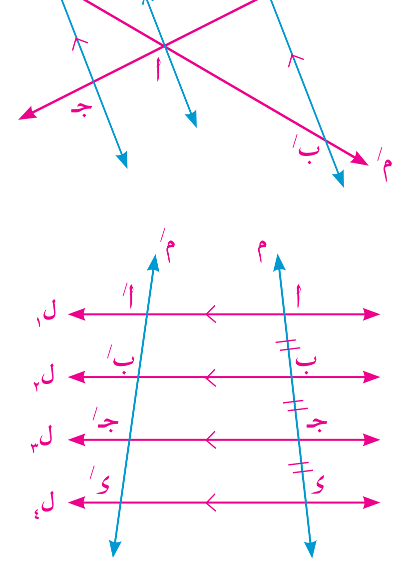
الحل

∵ أب // جـ ى // هـ و // س ص

∴ أجـ/ب ى = جـ هـ/ى و = هـ س/و ص

٢٨/ب ى = ٢٠/١٥ = هـ س/٣٣ ∴ ب ى = ٢١سم ، هـ س = ٤٤سم.

حالات خاصة

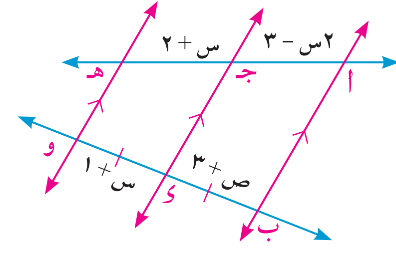


١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ

وكان: ب ب/ // جـ جـ/، فإن: $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أب/}{أجـ/}$

وبالعكس: إذا كان: $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أب/}{أجـ/}$

فإن: ب ب/ // جـ جـ/



نظرية تاليس الخاصة

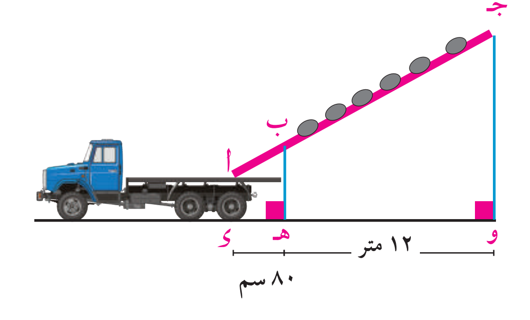
٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

فى الشكل المقابل ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ قطعها المستقيمان م، م/

وكان: أب = ب جـ = جـ ى فإن: أ/ب/ = ب/جـ/ = جـ/ى/

مثال

٧ **فى الشكل المقابل** أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.



الحل

∵ أب // جـ ى // هـ و ، ب ى = ى و

∴ أ جـ = جـ هـ

ويكون: ٢س - ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

∵ ب ى = ى و ، س = ٥ ∴ ص + ٣ = ٥ + ١ ∴ ص = ٣

مثال

٨ الربط بالصناعة: تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.

فإذا كانت ى، هـ ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى بنفس الترتيب، أب = ١,٢م، ى هـ = ٨٠سم ، هـ و = ١٢مترًا

أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

الحل

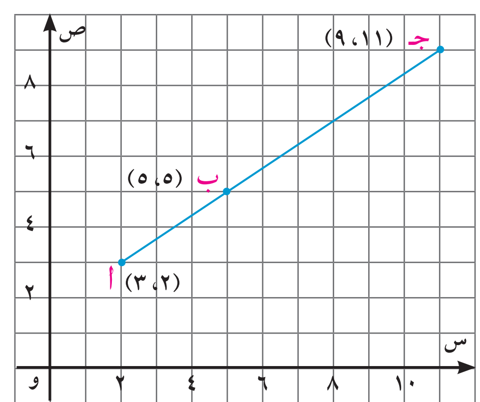
∵ ى، هـ ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى ∴ أى // ب هـ // جـ و

∵ أى // ب هـ // جـ و ، أجـ ، ى و قاطعان لها ∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{ى و}{ى هـ}$

ويكون: $\frac{أجـ}{١,٢} = \frac{١٢ + ٠,٨}{٠,٨}$

∴ أجـ = $\frac{١,٢ \times ١٢,٨}{٠,٨}$ = ١٩,٢ مترًا ∴ أجـ ≃ ١٩ مترًا

٦ تفكير ناقد

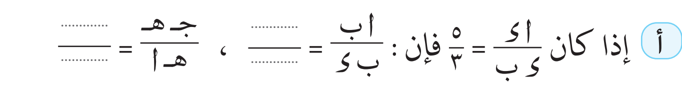


أوجد من الشكل $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟



تمـــارين ٣ – ١

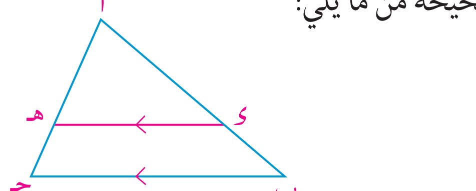
١ فى الشكل المقابل $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ أكمل:



أ إذا كان $\frac{\text{أى}}{\text{ى ب}} = \frac{٥}{٣}$ فإن: $\frac{\text{أب}}{\text{ى ب}} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{......}{......}$

ب إذا كان $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٤}{٧}$ فإن: $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ب ى}}{\text{أ ب}} = \frac{......}{......}$

٢ فى الشكل المقابل $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$. حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

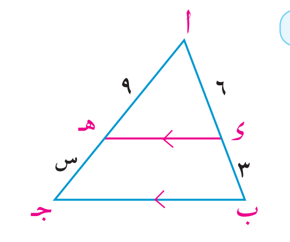


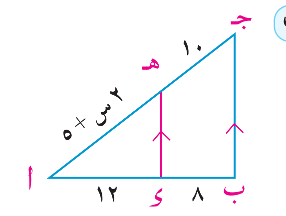
أ $\frac{\text{أب}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ب $\frac{\text{أى}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{هـ جـ}}$

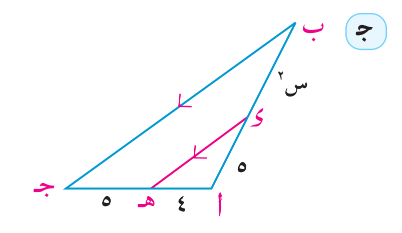
جـ $\frac{\text{أب}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ د $\frac{\text{أب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$

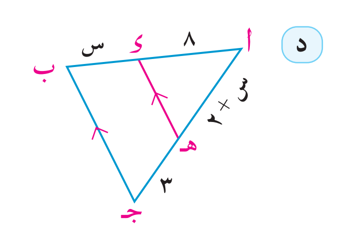
هـ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ هـ}}$ و $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

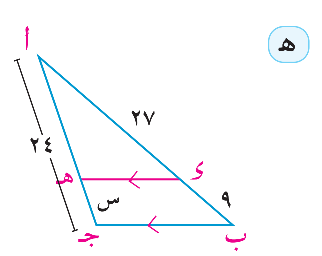
٣ فى كل من الأشكال التالية $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

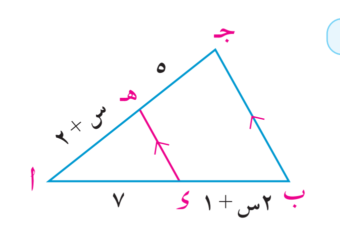
أ


ب


جـ


د 

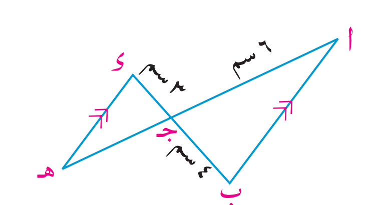
هـ 

و 

٤ فى الشكل المقابل: أب // ءهـ ، أهـ ∩ بء = {جـ}

أجـ = ٦سم، بجـ = ٤سم، جـء = ٣سم

أوجد طول جـهـ



٥ س ص ∩ ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩سم، ص م = ١٥سم، ع ل = ٣٦ سم.

أوجد طول ع م.

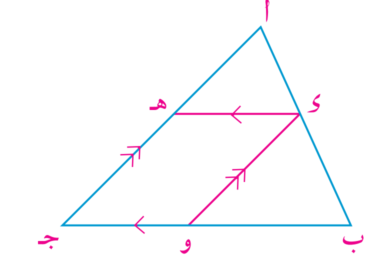


٦ لكل مما يأتى: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

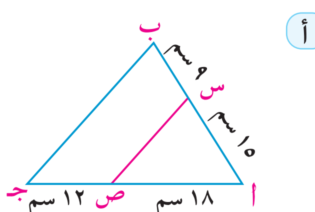


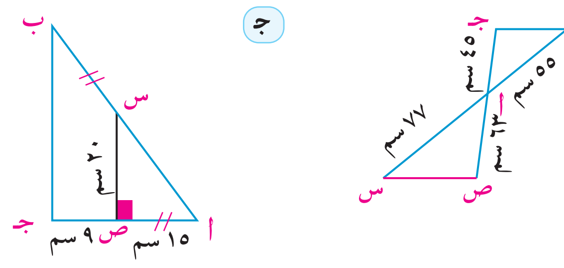
أ أء = ٤ ، بء = ٨ ، جـهـ = ٦ ، أهـ = س.

ب أهـ = س ، هـجـ = ٥، أء = س - ٢ ، ءب = ٣.



٧ فى كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ

أ 

ب ج 

٨ س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤سم، س ع = ٢١سم، ل ∈ س ص بحيث س ل = ٥,٦سم،

م ∈ س ع حيث س م = ٨,٤سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩ فى المثلث أ ب جـ، ء ∈ أب، هـ ∈ أجـ، ٥أهـ = ٤ هـجـ.

إذا كان أء = ١٠ سم، ءب = ٨سم. حدد ما إذا كان ءهـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠ أ ب جـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ. فإذا كان أهـ = ٦سم، ب هـ = ١٣سم، هـو = ١٠سم،

هـء = ٧,٨سم. أثبت أن الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف.

٣ - ٢

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

Angle Bisectors and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية فى مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.



١- ارسم المثلث أ ب جـ، وارسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ليقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء.

٢- قس كلًّا من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$.

٣- احسب كل من النسبتين $\frac{ب ء}{ء جـ}$، $\frac{أ ب}{أ جـ}$ وقارن بينهما.
ماذا تستنتج؟

٤- كرر العمل السابق عدة مرات.
هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

منصف زاوية مثلث Bisector of an Angle of a Triangle

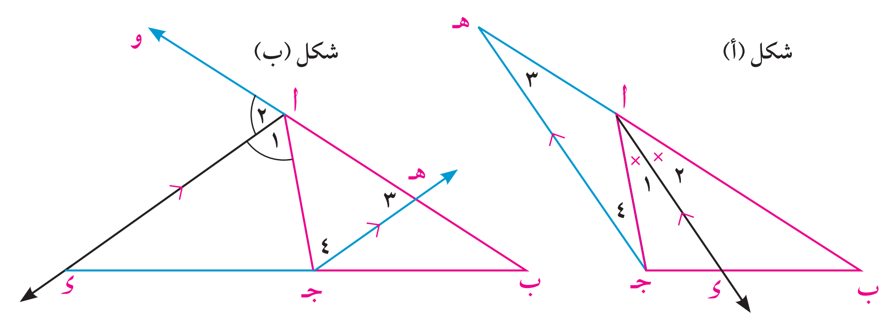


المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى Perpendicular



إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزآين فإن النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين. (برهان النظرية لا يمتحن فيه الطالب)



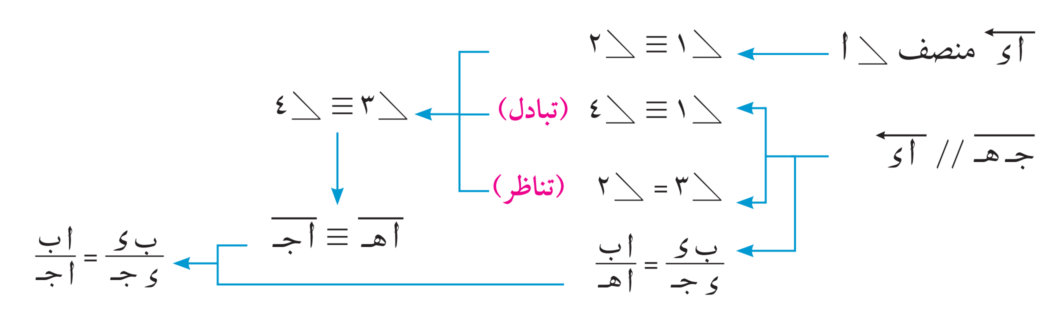
الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم .
- حاسب آلى وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ جـ
(من الداخل فى شكل أ ، من الخارج فى شكل ب).

المطلوب : $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

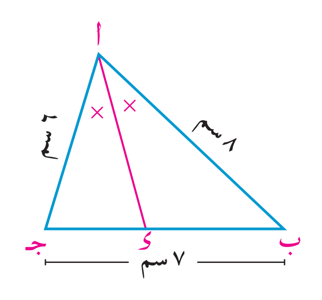
البرهان : ارسم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ // $\overleftrightarrow{أ ء}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ فى هـ. اتبع المخطط التالى وا كتب البرهان.



مثال

(١) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨سم، ا جـ = ٦سم، ب جـ = ٧سم، رسم $\overleftarrow{اى}$ ينصف ∠ ب ا جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في ى. أوجد طول كل من $\overline{ب ى}$، $\overline{ى جـ}$

الحل



∵ $\overleftarrow{اى}$ ينصف ∠ ب ا جـ ∴ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{اب}{اجـ}$ (نظرية)

∵ اب = ٨سم، اجـ = ٦سم ∴ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∵ ب جـ = ب ى + ى جـ = ٧سم ∴ $\frac{ب ى}{٧ - ب ى} = \frac{٤}{٣}$

٣ب ى = ٢٨ - ٤ ب ى (ضرب تبادلى)

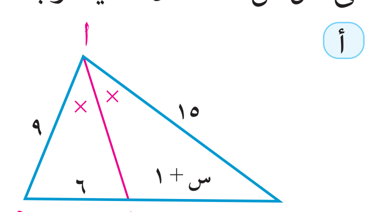
٧ب ى = ٢٨ ∴ ب ى = ٤سم ، جـ ى = ٣سم

حاول أن تحل

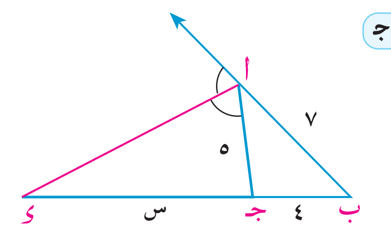
(١) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ

ب



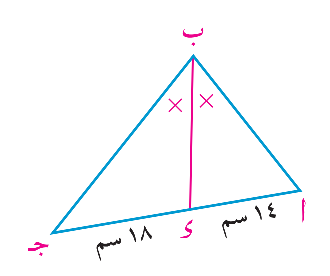
جـ



مثال

(٢) ا ب جـ مثلث. رسم $\overleftarrow{ب ى}$ ينصف ∠ ب، ويقطع $\overline{اجـ}$ في ى، حيث اى = ١٤سم، ى جـ = ١٨سم. إذا كان محيط △ ا ب جـ = ٨٠سم، فأوجد طول كل من: $\overline{ب جـ}$، $\overline{اب}$.

الحل



في △ ا ب جـ

∵ $\overleftarrow{ب ى}$ ينصف ∠ ب ∴ $\frac{اب}{ب جـ} = \frac{اى}{ى جـ}$



∴ $\frac{اب}{ب جـ} = \frac{١٤}{١٨} = \frac{٧}{٩}$

∵ محيط △ ا ب جـ = ٨٠سم، ا جـ = ١٤ + ١٨ = ٣٢سم

∴ ا ب + ب جـ = ٨٠ - ٣٢ = ٤٨سم

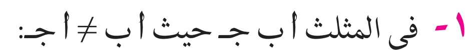
∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧}{٩}$ ∴ $\frac{\text{أ ب} + \text{ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧ + ٩}{٩}$ (خواص التناسب)

ويكون $\frac{٤٨}{\text{ب جـ}} = \frac{١٦}{٩}$ ∴ ب جـ = ٢٧سم ، أ ب = ٢١سم

حاول أن تحل

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. رسم $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ أ، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ى.
إذا كان طول $\overline{\text{ب ى}}$ = ٢٤سم، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ أ ب جـ.

ملاحظة هامّة



١- في المثلث أ ب جـ حيث أ ب ≠ أ جـ:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ،

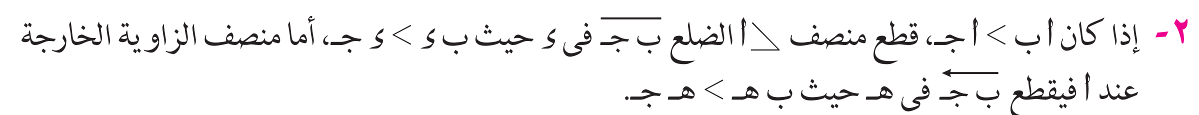
$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ.

فإن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

و يكون $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

أي أن $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل في ى ومن الخارج في هـ بنسبة واحدة

ويكون المنصفين $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ متعامدين. (لماذا)؟



٢- إذا كان أ ب > أ جـ، قطع منصف ∠ أ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ى حيث ب ى > ى جـ، أما منصف الزاوية الخارجة عند أ فيقطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ في هـ حيث ب هـ > هـ جـ.

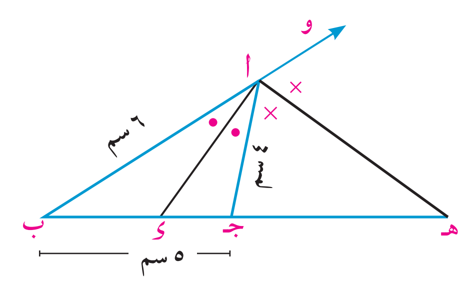
تفكير ناقد

- كلما كبر أ جـ ماذا يحدث للنقطة ى؟
- إذا كان أ جـ = أ ب أين تقع النقطة ى؟ وما وضع $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ بالنسبة إلى $\overline{\text{ب جـ}}$ عندئذٍ؟
- عندما يصبح أ جـ > أ ب ما العلاقة بين ى جـ، ى ب؟ وأين تقع هـ عندئذٍ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

٣ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٦سم، أ جـ = ٤سم ، ب جـ = ٥سم. رسم $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ى، ورسم $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ في هـ. احسب طول $\overline{\text{ى هـ}}$.

الحل



∵ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ أ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ ى، هـ تقسمان $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

أي أن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∵ ب جـ = ب ى + ى جـ = ٥ ، ب هـ − هـ جـ = ب جـ = ٥سم

من خواص التناسب نجد

$\frac{ب ى + ى جـ}{ى جـ} = \frac{٣ + ٢}{٢}$ $\qquad$ $\frac{٥}{ى جـ} = \frac{٥}{٢}$ $\quad \therefore$ ى جـ = ٢

$\frac{ب هـ - هـ جـ}{هـ جـ} = \frac{٣ - ٢}{٢}$ $\qquad$ $\frac{٥}{هـ جـ} = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore$ هـ جـ = ١٠

ويكون ى هـ = ى جـ + جـ هـ $\qquad$ ى هـ = ٢ + ١٠ = ١٢سم

إيجاد طول المنصف الداخلى والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث.

تمرين مشهور

إذا كان $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف $\angle$ أ في $\triangle$ أ ب جـ من الداخل ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى

فإن: أ ى = $\sqrt{أ ب \times أ جـ - ب ى \times ى جـ}$ $\qquad$ (برهان التمرين المشهور لا يمتحن فيه الطالب)

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ من الداخل، $\overleftrightarrow{أ ى} \cap \overline{ب جـ} = \{ى\}$

المطلوب: $(أ ى)^٢ = أ ب \times أ جـ - ب ى \times ى جـ$

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب جـ

وتقطع $\overleftrightarrow{أ ى}$ في هـ، ارسم $\overline{ب هـ}$

فيكون: $\triangle$ أ جـ ى $\sim$ $\triangle$ أ هـ ب $\quad$ (لماذا)؟، $\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{أ جـ}{أ هـ}$

$\therefore$ أ ى $\times$ أ هـ = أ ب $\times$ أ جـ

أ ى $\times$ (أ ى + ى هـ) = أ ب $\times$ أ جـ

$(أ ى)^٢$ = أ ب $\times$ أ جـ - أ ى $\times$ ى هـ

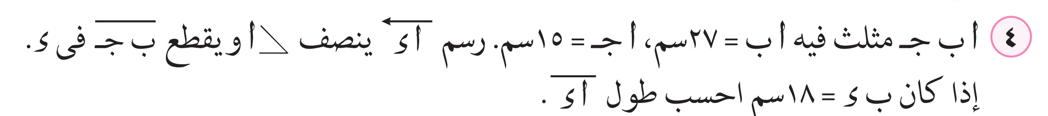
$(أ ى)^٢$ = أ ب $\times$ أ جـ - ب ى $\times$ ى جـ

أي أن: أ ى = $\sqrt{أ ب \times أ جـ - ب ى \times ى جـ}$

تذكر

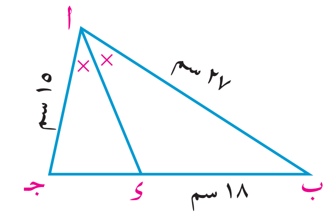
أ ى $\times$ ى هـ = ب ى $\times$ ى جـ

مثال



(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٢٧سم، أ جـ = ١٥سم. رسم $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف $\angle$ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى.

إذا كان ب ى = ١٨سم احسب طول $\overline{أ ى}$.



الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ $\quad \therefore \frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

ويكون $\frac{١٨}{ى جـ} = \frac{٢٧}{١٥}$ $\quad \therefore$ ى جـ = ١٠سم

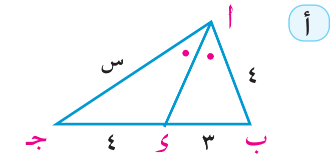
$\because$ أ ى = $\sqrt{أ ب \times أ جـ - ب ى \times ى جـ}$

$\therefore$ أ ى = $\sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

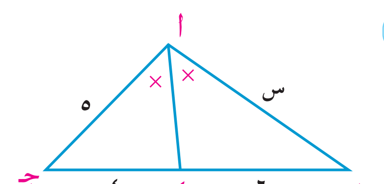
حاول أن تحل

(٣) فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{\text{أ ى}}$

أ

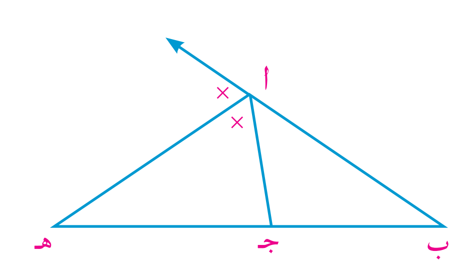


ب



لاحظ أن: فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الخارج

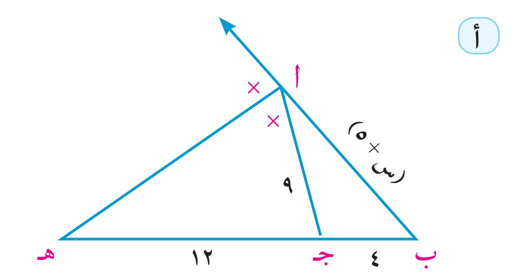
ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. فإن: أ هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{أ ب} \times \text{أ جـ}}$



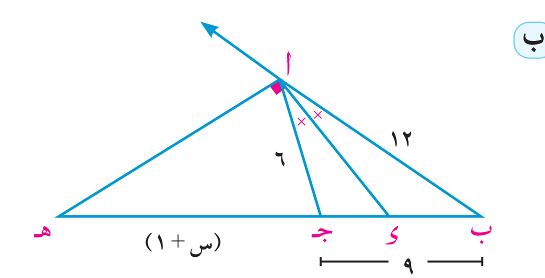
حاول أن تحل

(٤) فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س، وطول $\overline{\text{أ هـ}}$

أ



ب



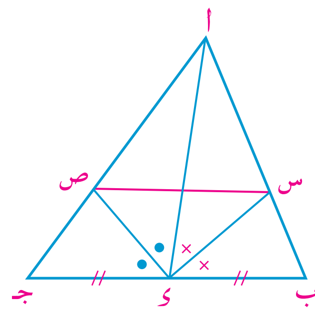
مثال

(٥) فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ى}}$ متوسط فى △ أ ب جـ

$\overleftrightarrow{\text{ى س}}$ ينصف ∠ أ ى ب. ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى س.

$\overleftrightarrow{\text{ى ص}}$ ينصف ∠ أ ى جـ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ص.

أثبت أن: $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.



الحل

فى △ أ ى ب: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ى س}}$ ينصف ∠ أ ى ب ∴ $\frac{\text{ى أ}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س ب}}$ (١)

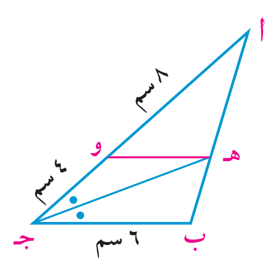
فى △ أ ى جـ: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ى ص}}$ ينصف ∠ أ ى جـ ∴ $\frac{\text{ى أ}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

فى △ أ ب جـ: ∵ $\overline{\text{أ ى}}$ متوسط ∴ ى ب = ى جـ (٣)

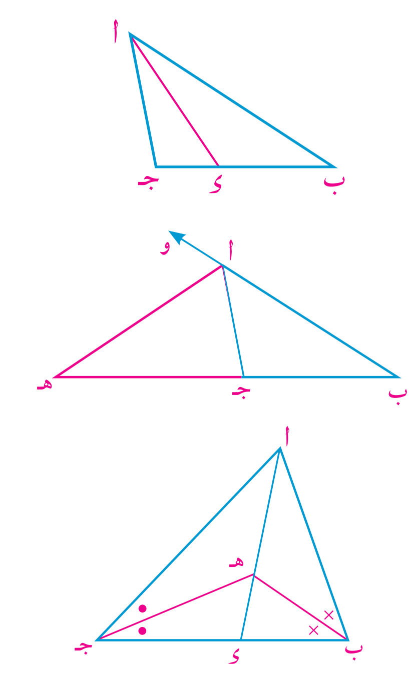
من (١)، (٢)، (٣) $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ ويكون $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

حاول أن تحل

٥ فى الشكل التالي أثبت أن: $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$



حالات خاصة



١- فى △ أ ب جـ:

إذا كان ى ∈ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

فإن: $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف ∠ ب أ جـ

وإذا كان هـ ∈ $\overleftrightarrow{ب جـ}$، هـ ∉ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب هـ}{جـ هـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

فإن: $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن المثلث أ ب جـ

ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- فى الشكل المقابل:

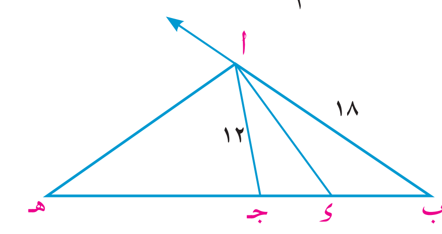
$\overrightarrow{ب هـ}$، $\overrightarrow{جـ هـ}$ منصفا زاويتا ب، جـ

يتقاطعا فى نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{أ ى}$. ماذا تستنتج؟


حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

مثال

٦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٨سم، ب جـ = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم، ى ∈ $\overline{ب جـ}$، حيث ب ى = ٩سم رسم $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ى}$ فقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ. أثبت أن $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف ∠ ب أ جـ ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$.



الحل

فى △ أ ب جـ: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

جـ ى = ب جـ − ب ى = ١٥ − ٩ = ٦سم

∴ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∵ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$ $\overleftrightarrow{أ ى}$ ينصف ∠ ب أ جـ

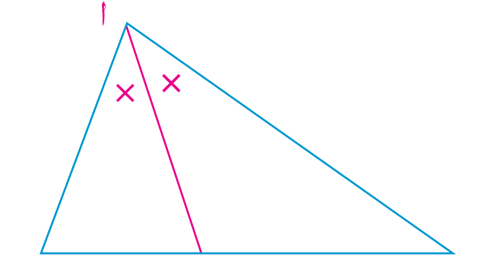
∵ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ى}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ

∴ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن △ أ ب جـ ويكون $\frac{ب هـ}{جـ هـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

∵ ب هـ = ب جـ + جـ هـ ∴ $\frac{١٥ + جـ هـ}{جـ هـ} = \frac{١٨}{١٢}$ جـ هـ = ٣٠سم

تمــاريـن ٣ – ٢

① فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{أ ى}$ ينصف ∠ أ. أكمل:



أ) $\frac{ب ى}{ى جـ}$ = ...

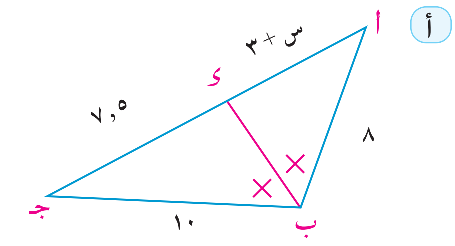
ب) $\frac{أ جـ}{أ ب}$ = ...

جـ) $\frac{ب ى}{ب أ}$ = ...

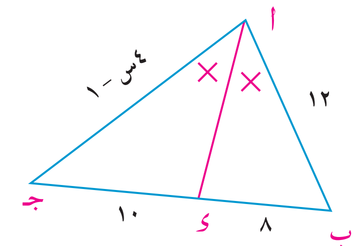
د) أ ب × جـ ى = ...

② فى كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

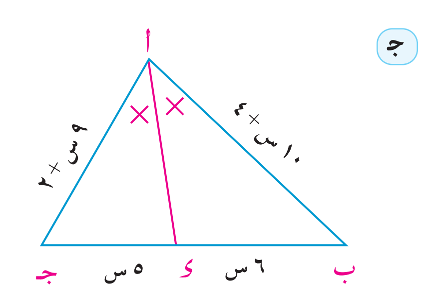
أ)



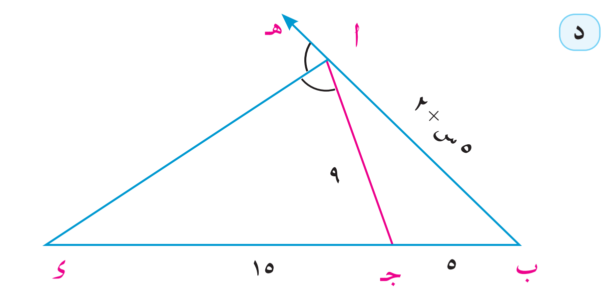
ب)



جـ)



د)

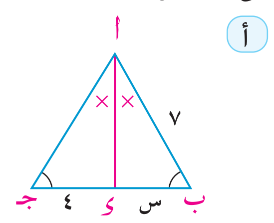


③ أ ب جـ مثلث محيطه ٢٧سم، رسم $\overleftarrow{ب ى}$ ينصف ∠ ب و يقطع $\overline{أ جـ}$ فى ى.

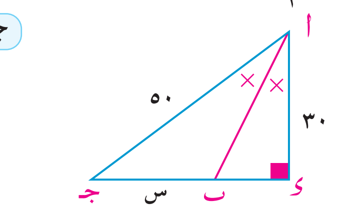
إذا كان أ ى = ٤سم، جـ ى = ٥سم، أوجد طول كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ ى}$

④ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ثم أوجد محيط △أ ب جـ.

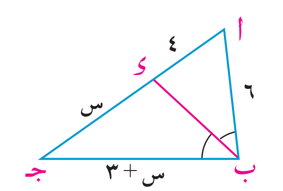
أ



ب



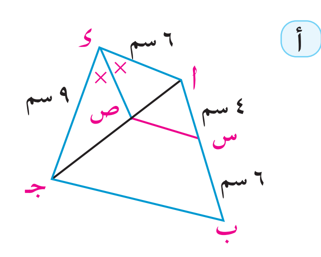
جـ



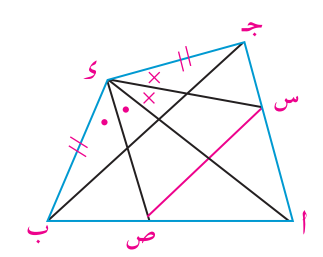
⑤ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٤سم، ب جـ = ٦سم، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى، ورسم $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ أوجد طول كل من $\overline{\text{ى هـ}}$، $\overline{\text{أ ى}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$.

⑥ فى كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أ

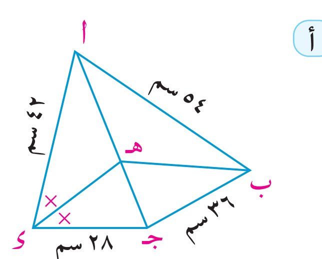


ب

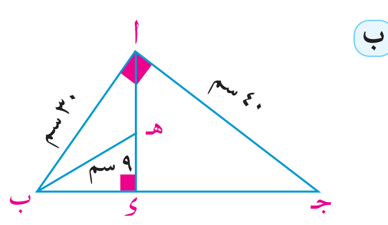


⑦ فى كل من الأشكال التالية، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠أ ب جـ.

أ



ب





حساب المثلثات

Trigonometry

أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى).
- يتعرف القياس الدائرى للزوايا المركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى القياس الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية .
- يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة.
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة (١٨٠° ± θ)، (٣٦٠° ± θ)، (٩٠° ± θ)، (٢٧٠° ± θ).
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:
  - جا أس = جتا ب س
  - ظا أس = ظتا ب س
  - قا أس = قتا ب س
- يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم النسب المثلثية لها.
- يتعرف التمثيل البيانى لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتى تمثلها دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

المصطلحات الأساسية

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية موجهة Directed Angle
- زاوية نصف قطرية (راديان) Radian
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive Measure
- قياس سالب Negative Measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrant Angle
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent
- دالة دائرية Circular Function
- الزاوية المنتسبة Related Angles

دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): الزاوية الموجهة.

الدرس (٤ – ٢): القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.

الدرس (٤ – ٣): الدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٤): الزاويا المنتسبة.

الدرس (٤ – ٥): التمثيل البيانى للدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسم بيانى.

نبذة تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التى اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده فى الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

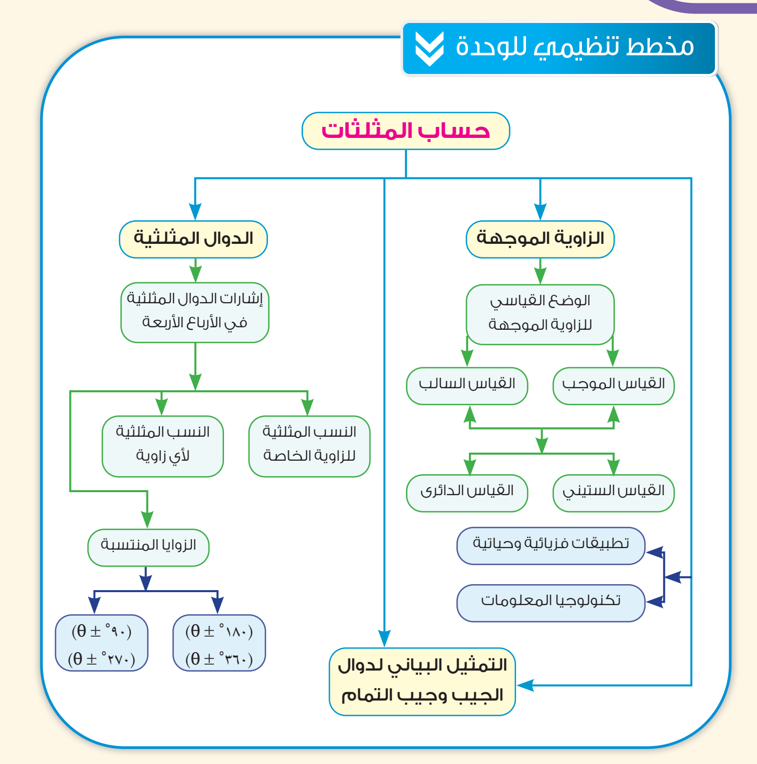
ويعد الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى (٩٤٠ – ٩٩٨م) فى القرن العاشر الميلادى، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكروى (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير.

حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم فى دفع عجلة التقدم والازدهار.

مخطط تنظيمي للوحدة



٤ - ١

الزاوية الموجهة
Directed Angle

سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثي المتعامد .
- مفهوم الزوايا المتكافئة.

المصطلحاتُ الأساسيّة

- قياس ستينى Degree Measure
- زاوية موجهة Directed angle
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive measure
- قياس سالب Negative measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrantal Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.



سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هى اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.

في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «**رأس الزاوية**».

والشعاعان $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ **ضلعا الزاوية.**

أى أن: $\overrightarrow{بأ} \cup \overrightarrow{بجـ} = (\measuredangle أ ب جـ)$

وتكتب كذلك $\widehat{أ ب جـ}$.



القياس الستينى للزاوية Degree Measure System

علمت أن القياس الستينى يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول.

وبالتالي فإن:

١- الزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (١َ)

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (١ً)

أى أن: ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

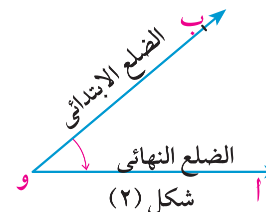


الزاوية الموجهة Directed Angle

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$) حيث العنصر الأول $\overrightarrow{وأ}$ هو الضلع الابتدائى للزاوية، العنصر الثانى $\overrightarrow{وب}$ هو الضلع النهائى للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).

ب
الضلع النهائى
الضلع الابتدائى
و
أ
شكل (١)

أما إذا كان الضلع الابتدائى $\overrightarrow{وب}$، الضلع النهائى $\overrightarrow{وأ}$ فتكتب عندئذ ($\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وأ}$) كما فى شكل (٢).



شكل (٢)



الزاوية الموجهة هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

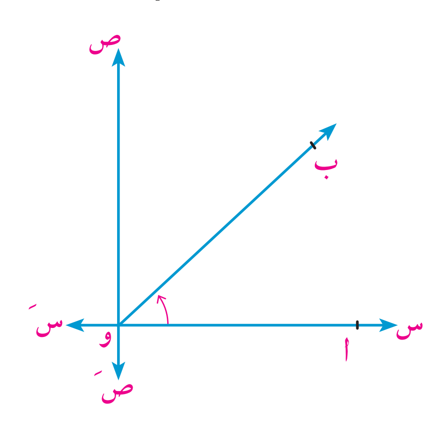
تفكير ناقد:

هل (و أ ، و ب) = (و ب ، و أ)؟ فسِّر إجابتك.

الوضع القياسى للزاوية الموجهة Standard position of the directed angle

تكون الزاوية فى وضع قياسى إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحورالسينات.

هل ∠ أ و ب الموجهة فى الوضع القياسى؟ فسِّر إجابتك.



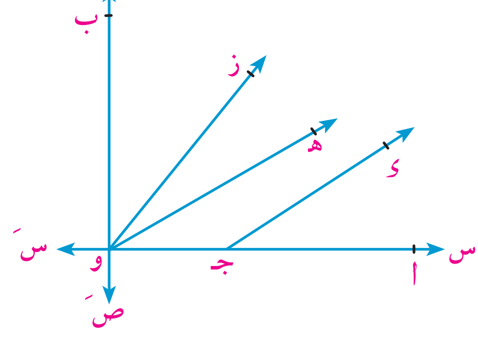
تعبير شفهى

أيٌّ من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسِّر إجابتك .

أ (جـ أ ، جـ ى)　　ب (و أ ، و هـ)

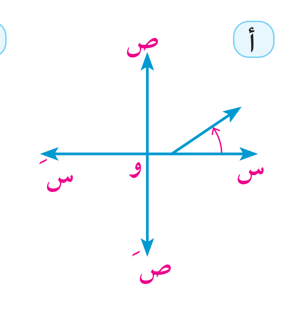
جـ (و هـ ، و أ)　　د (و أ ، و ز)

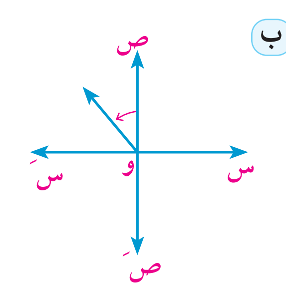
هـ (و ب ، و ز)　　و (و أ ، و ب)

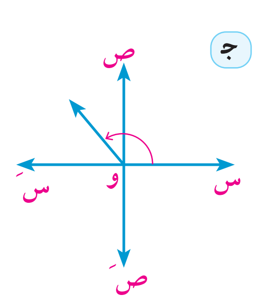


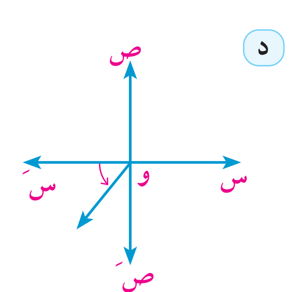
حاول أن تحل

١ أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى؟ فسِّر إجابتك.







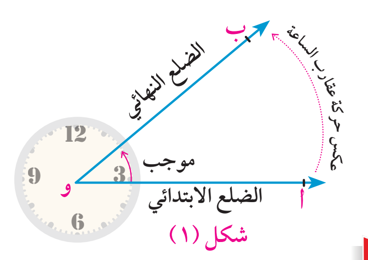


القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

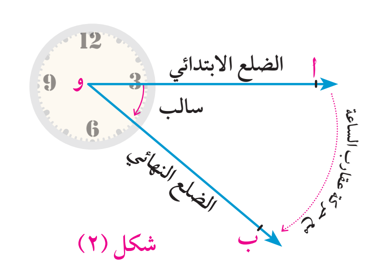
Positive and negative measures of a directed angle

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overleftrightarrow{و أ}$ إلى الضلع النهائي $\overleftrightarrow{و ب}$، في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overleftrightarrow{و أ}$ إلى الضلع النهائي $\overleftrightarrow{و ب}$، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



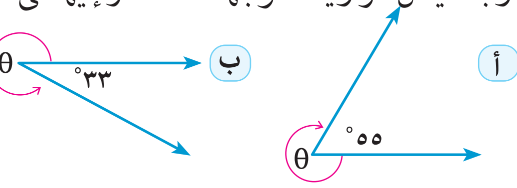
شكل (١)

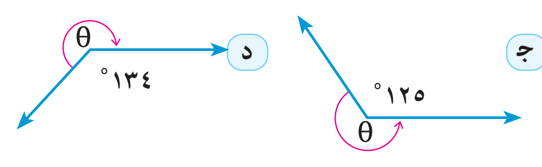


شكل (٢)

مثال

① أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:





الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى °٣٦٠

أ θ = − (°٣٦٠ − °٥٥) = − °٣٠٥

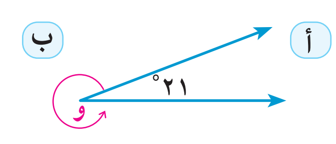
ب θ = °٣٦٠ − °٣٣ = °٣٢٧

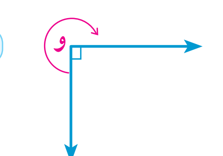
جـ θ = °٣٦٠ − °١٢٥ = °٢٣٥

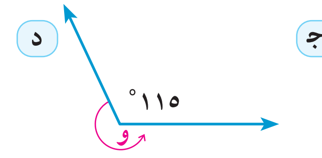
د θ = − (°٣٦٠ − °١٣٤) = − °٢٢٦

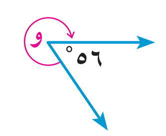
حاول أن تحل

② أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:





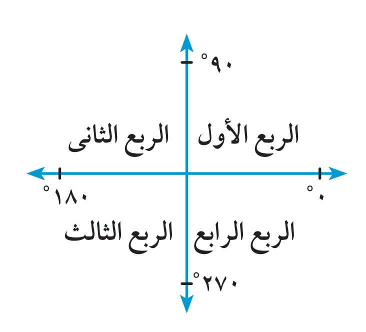




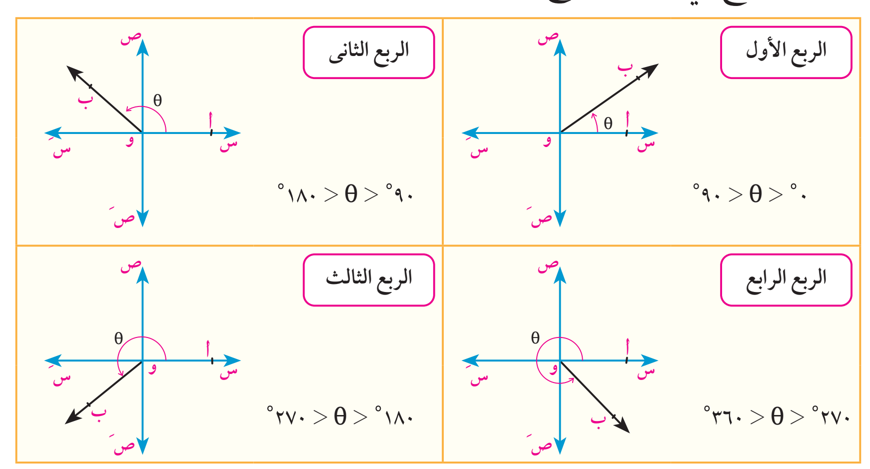
موقع الزاوية فى المستوى الإحداثى المتعامد:

Angle's position in the orthogonal coordinate plane

➢ يقسم المستوى الإحداثى المتعامد إلى أربعة أرباع كما فى الشكل المقابل.



- إذا كانت ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي $\overrightarrow{وب}$ يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



- إذا وقع الضلع النهائي $\overrightarrow{وب}$ على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية فى هذه الحالة **بالزاوية الربعية** (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التى قياساتها °٠، °٩٠، °١٨٠، °٢٧٠، °٣٦٠ هى زوايا ربعية.

مثال

(٢) عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ °٤٨ ب °٢١٧ ج °١٣٥ د °٢٩٥ هـ °٢٧٠

الحل

أ °٠ < °٤٨ < °٩٠ فهى تقع فى الربع الأول.

ب °١٨٠ < °٢١٧ < °٢٧٠ فهى تقع فى الربع الثالث.

ج °٩٠ < °١٣٥ < °١٨٠ فهى تقع فى الربع الثانى.

د °٢٧٠ < °٢٩٥ < °٣٦٠ فهى تقع فى الربع الرابع.

هـ °٢٧٠ زاوية ربعية.

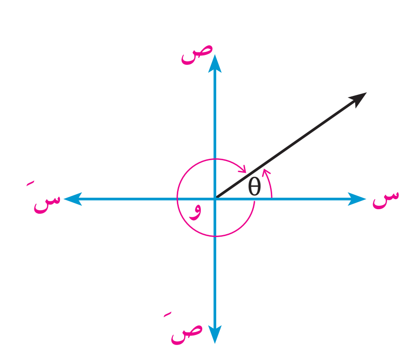
حاول أن تحل

(٣) عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ °٨٨ ب °١٥٢ ج °١٨٠ د °٣٠٠ هـ °١٩٦

ملاحظة:

- إذا كان (°θ) هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها يساوي (°θ – °٣٦٠)
- وإذا كان (–°θ) هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها يساوي (–°θ + °٣٦٠)



مثال

٣ عين القياس السالب لزاوية قياسها ٢٧٥°.

الحل

القياس السالب للزاوية (٢٧٥°) = ٢٧٥° – ٣٦٠° = – ٨٥°

التحقيق: |٢٧٥°| + |– ٨٥°| = ٢٧٥° + ٨٥° = ٣٦٠°

> **أضف إلى معلوماتك**
> مجموع القيمة المطلقة لكل من القياسين الموجب والسالب للزاوية الموجهة يساوى ٣٦٠°



حاول أن تحل

٤ عين القياس السالب للزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٣٢° ب ٢٧٠° جـ ٢١٠° د ٣١٥°

مثال

٤ عين القياس الموجب للزاوية –٢٣٥°

الحل

القياس الموجب للزاوية (– ٢٣٥°) = ٣٦٠° – ٢٣٥° = ١٢٥°

التحقيق: |–٢٣٥°| + |١٢٥°| = ٢٣٥° + ١٢٥° = ٣٦٠°

حاول أن تحل

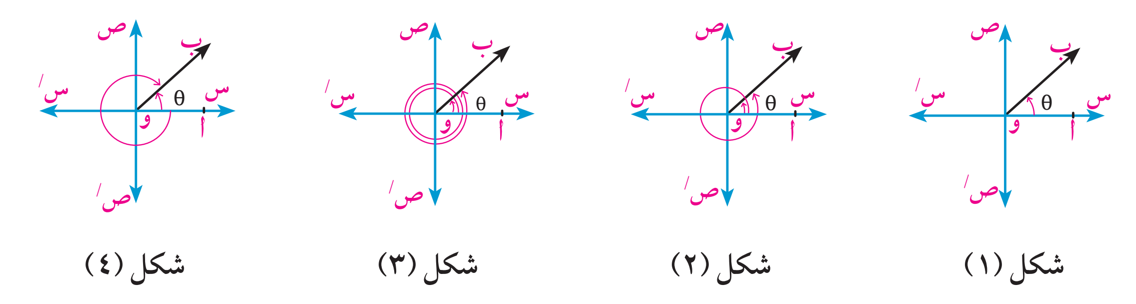
٥ عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ –٥٢° ب –١٢٦° جـ –٩٠° د –٣٢٠°

٦ الربط بالألعاب الرياضية: يدور أحد لاعبى القرص بزاوية قياسها ١٥٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسى.

الزوايا المتكافئة Equivalent angles

تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة (θ) فى الوضع القياسى لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

فى الأشكال (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائى و ب.

شكل (١): الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى.

شكل (٢): الزاويتان θ ، θ + ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان θ ، θ + ٢ × ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان θ ، –(٣٦٠° – θ) = θ – ٣٦٠° متكافئتان

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى فإن جميع الزوايا التى قياساتها:

θ ± ١ × ٣٦٠° أو θ ± ٢ × ٣٦٠° أو θ ± ٣ × ٣٦٠° أو..... أو θ + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص

يكون لها نفس الضلع النهائى، وتسمى **زوايا متكافئة**.

مثال

٥ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ ١٢٠° ب – ٢٣٠°

الحل

أ زاوية بقياس موجب: ١٢٠° + ٣٦٠° = ٤٨٠° (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: ١٢٠° – ٣٦٠° = –٢٤٠° (بطرح ٣٦٠°)

ب زاوية بقياس موجب: –٢٣٠° + ٣٦٠° = ١٣٠° (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: –٢٣٠° – ٣٦٠° = –٥٩٠° (بطرح ٣٦٠°)

فكر: هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا الآتية:

أ ٤٠° ب ١٥٠° ج – ١٢٥° د –٢٤٠° هـ –١٨٠°

٨ **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° في الوضع القياسى ما عدا الإجابة:

أ –٢٨٥° ب –٦٤٥° ج ٢٨٥° د ٤٣٥°

تحقق من فهمك

١ عين الربع الذى تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٥٦° ب ٣٢٥° ج ٥٧٠° د ١٦٦° هـ ٣٩٠°

٢ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٤٣° ب ٢١٤° ج ١٢٥° د ٩٠° هـ ٣١٢°

٣ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ –٥٦° ب –٢١٥° ج ٤٩٥° د ٩٣٠° هـ –٤٥٠°

تمـــارين ٤ – ١

١ أكمل:

أ تكون الزاوية الموجهة فى وضع قياسى إذا كان ....

ب يقال للزاوية الموجهة فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان ....

ج تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية .... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية ....

د إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات تسمى ....

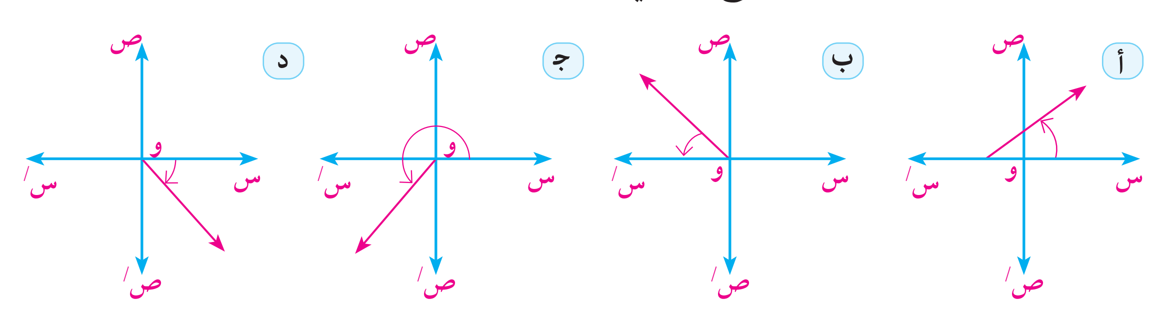
هـ إذا كان θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى، ن∈ صـ فإن (θ + ن × ٣٦٠°) تسمى بالزوايا ....

و أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها ٥٣٠° هو ....

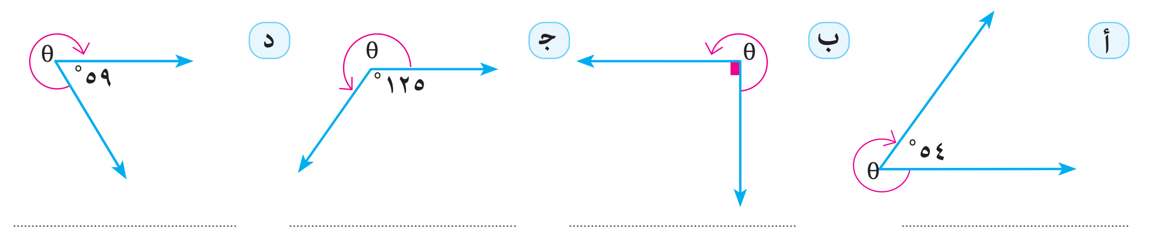
ز الزاوية التى قياسها ٩٣٠° تقع فى الربع ....

ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها –٦٩٠° هو ....

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية فى الوضع القياسي



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال التالية:



....

٤ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٢٤° ب ٢١٥° ج - ٤٠° د -٢٢٠° هـ ٦٤٠°

....

٥ ضع كلًّا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى، موضحًا ذلك بالرسم:

أ ٣٢° ب ١٤٠° ج - ٨٠° د - ١١٠° هـ -٣١٥°

٦ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ ٨٣° ب ١٣٦° ج ٩٠°

....

د ٢٦٤° هـ ٩٦٤° و ١٠٧٠°

....

٧ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزاويا الآتية:

أ -١٨٣° ب -٢١٧° ج -٣١٥° د -٥٧٠°



القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

Degree Measure and Radian Measure of an Angle

سوف تتعلم

- مفهوم القياس الدائرى للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائرى.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن علمت أن القياس الستينى ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = ٦٠ دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية.

هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

القياس الدائرى Radian Measure





١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما فى الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة - ماذا تلاحظ؟

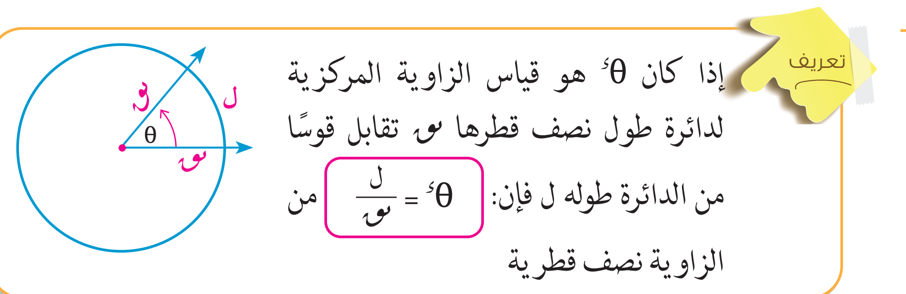
نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوى مقدارًا ثابتًا.

أى أن: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{م أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{م أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{م أ_3}$ = مقدار ثابت.

وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية.

القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز لها بالرمز ($\theta^{د}$)

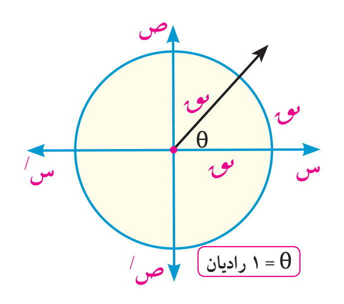


تعريف

إذا كان $\theta^{د}$ هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها نق تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن: $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ من الزاوية نصف قطرية

من التعريف نستنتج أن: $ل = \theta^{د} \times نق$ ، $نق = \frac{ل}{\theta^{د}}$

ووحدة قياس الزواية فى القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز ($١^د$) ويقرأ واحد دائرى (راديان).



تعريف

الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

تفكير ناقد: هل القياس الدائرى لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسِّر إجابتك.

مثال

١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد لأقرب رقمين عشرين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله يساوى $\frac{٥\pi}{١٢}$

الحل

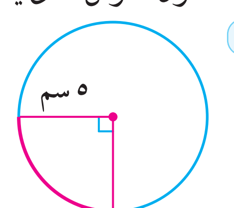
نستخدم صيغة طول القوس: $ل = \theta^د \times نق$

بالتعويض عن نق = ٨ سم ، $\theta^د = \frac{٥\pi}{١٢}$ فيكون: $ل = \frac{٥\pi}{١٢} \times ٨$ ∴ ل ≃ ١٠,٤٧سم

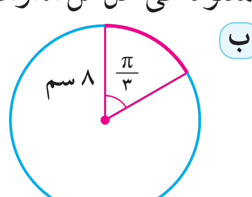
حاول أن تحل

١ أوجد طول القوس الذى يحصر الزاوية المعلومة فى كل من الدوائر الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة .

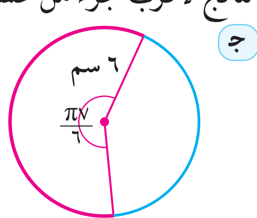
أ



ب



جـ

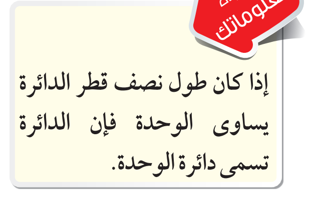


العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية:

Relation between degree measure and radian measure of an angle

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوى قياس قوسها.

أى أن: الزاوية المركزية التى قياسها الستينى ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢ π نق



إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة.



وفى دائرة الوحدة

فإن: ٢π (راديان) بالتقدير الدائرى يكافئ ٣٦٠° بالتقدير الستينى.

أى أن: π (راديان) يكافئ ١٨٠° $١^د$ (راديان) = $\frac{١٨٠°}{\pi}$ ≃ ٥٧° ١٧َ ٤٥ً

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائرى $\theta^د$ وقياسها الستينى سْ فإن:

$$\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{\theta^د}{\pi}$$



توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grad) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.
إذا كانت س، θ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة، والراديان، والجراد فإن:

$$\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{θ^{ء}}{\pi} = \frac{ص^{ج}}{٢٠٠}$$

مثال

٢ حول ٣٠° إلى قياس دائرى بدلالة π .

الحل

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة $\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{θ^{ء}}{\pi}$

$$θ^{ء} = \frac{٣٠^{\circ} \times \pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٦}$$

مثال

٣ حول قياس الزاوية ١,٢ء إلى قياس ستينى.

الحل

$$س^{\circ} = \frac{١,٢ \times ١٨٠^{\circ}}{\pi}$$

$$س^{\circ} = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢ = ١٨'' \; ٤٥' \; ٦٨^{\circ}$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ ← 1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = °'''

68° 45" 17.77"

حاول أن تحل

٢ حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس ستينى مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ ٠,٧ء ب ١,٦ء جـ ٢,٠٥ء د −١,٠٥ء

تمـــارين ٤ – ٢

أولًا: اختيار من متعدد:

١) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها:

أ) ١٢٠° ب) ٢٤٠° ج) ٣٠٠° د) ٤٢٠°

٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع فى الربع:

أ) الأول ب) الثانى ج) الثالث د) الرابع

٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع:

أ) الأول ب) الثانى ج) الثالث د) الرابع

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى ١٨٠° (ن – ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية المخمس المنتظم بالقياس الدائرى تساوى:

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{٧\pi}{٢}$ ج) $\frac{٣\pi}{٥}$ د) $\frac{٢\pi}{٣}$

٥) الزاوية التى قياسها $\frac{٧\pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى:

أ) ١٠٥° ب) ٢١٠° ج) ٤٢٠° د) ٨٤٠°

٦) إذا كان القياس الستينى لزاوية هو ٤٨َ ٦٤ْ فإن قياسها الدائرى يساوى:

أ) ٠,١٨ ءْ ب) ٠,٣٦ ءْ ج) ٠,١٨ π د) ٠,٣٦ π

٧) طول القوس فى دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٣٠° يساوى:

أ) ٢π سم ب) ٣π سم ج) ٤π سم د) ٥π سم

٨) القوس الذى طوله ٥πسم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:

أ) ٣٠° ب) ٦٠° ج) ٩٠° د) ١٨٠°

٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٤}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى:

أ) $\frac{\pi}{٦}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) أوجد بدلالة π القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ) ٢٢٥° .... ب) ٢٤٠° ....

جـ) –١٣٥° .... د) ٣٠٠° ....

هـ) ٣٩٠° .... و) ٧٨٠° ....

(١١) أوجد القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ) ٥٦,٦° ب) ١٨َ ٢٥° جـ) ٤٨ً ٥٠َ ١٦٠°

....

(١٢) أوجد القياس الستينى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ) ٠,٤٩ء ب) ٢,٢٧ء جـ) $-٣\frac{١}{٢}$ء

....

(١٣) إذا كان θ قياس زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق وتحصر قوسًا طوله ل :

أ) إذا كان نق = ٢٠ سم، θ = ٢٠ً ١٥َ ٧٨° أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

ب) إذا كان ل = ٢٧,٣ سم، θ = ٢٤ً ٠َ ٧٨° أوجد نق. (لأقرب جزء من عشرة)

(١٤) زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوسًا طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

(١٥) أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى للزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٨,٧ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

(١٦) الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة.



الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

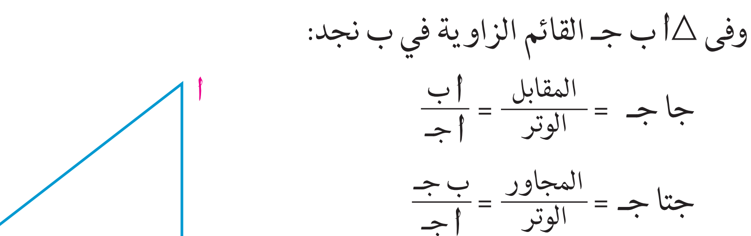
فكر و ناقش

سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

وفي $\triangle$ أ ب جـ القائم الزاوية في ب نجد:

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$





ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

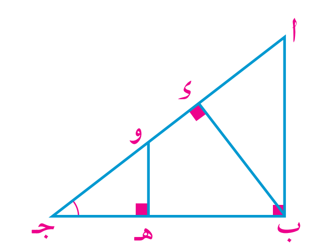


١- في الشكل المقابل عبر عن

جا جـ بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تتساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟



لاحظ أن:

المثلثات ب أ جـ ، هـ و جـ ، ء ب جـ متشابهه (لماذا)؟

ومن التشابه يكون: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\text{هـ و}}{\text{و جـ}}$ = $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}}$ = جا جـ لماذا؟

أي أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

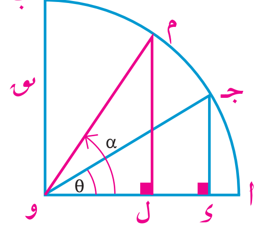
٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها نق سم

حيث: ق ($\angle$ ء و جـ) = θ

جا θ = $\frac{\text{جـ ء}}{\text{نق}}$

وعندما يزداد ق ($\angle$ ء و جـ) إلى α

فإن جا α = $\frac{\text{م ل}}{\text{نق}}$



أي أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها،

وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

دائرة الوحدة The unit circle

فى أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١، ٠)، ب (-١، ٠)، وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠، ١)، ى (٠، -١).

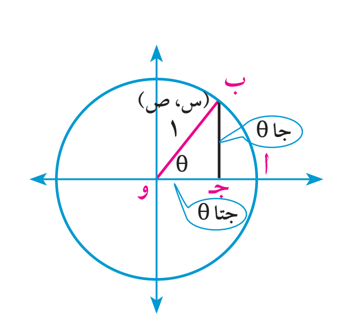
★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

س ∈ [-١، ١] ، ص ∈ [-١، ١].

حيث $س^2 + ص^2 = ١$ نظرية فيثاغورث

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية The basic trigonometric functions of an angle

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية:



١- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثى السينى للنقطة ب

أى أن: جتا θ = س

٢- جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب

أى أن: جا θ = ص

٣- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

أى أن: ظا θ = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، ظا θ = $\frac{جا θ}{جتا θ}$ حيث جتا θ ≠ ٠

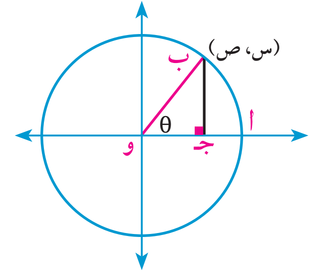
لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ، جا θ)

إذا كانت النقطة جـ $(\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهه قياسها θ مع دائرة الوحدة

فإن: جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

مقلوبات الدوال الأساسية The reciprocals of the basic trigonmetric functions

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص) وقياسها θ توجد الدوال الآتية:



١- قاطع الزاوية θ: قا θ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{جتا θ}$ حيث س ≠ ٠

٢- قاطع تمام الزاوية θ: قتا θ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١}{جا θ}$ حيث ص ≠ ٠

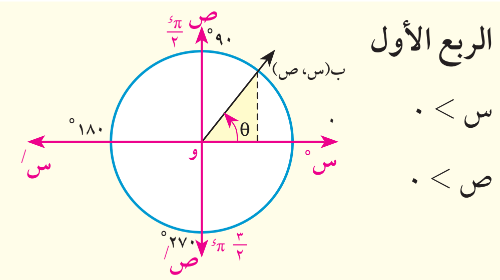
٣- ظل تمام الزاوية θ: ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ = $\frac{١}{ظا θ}$ حيث ص ≠ ٠

إشارات الدوال المثلثية
The signs of The Trigonometric Functions

الربع الأول

س > ٠

ص > ٠

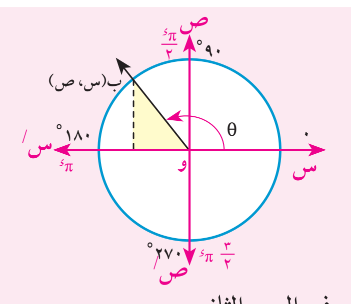


الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الأول.
لذلك كل الدوال المثلثية للزاوية التى ضلعها النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ تكون موجبة

الربع الثاني

س < ٠

ص > ٠

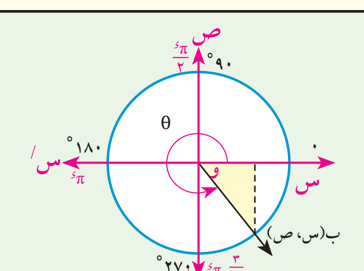


الضلع النهائى يقع فى الربع الثانى
لذلك دالة الجيب ومقلوبها تكونان موجبتين وباقى الدوال سالبة.

الربع الرابع

س > ٠

ص < ٠



الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الرابع
لذلك دالة جيب التمام ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

الربع الثالث

س < ٠

ص < ٠

الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الثالث
لذلك دالة الظل ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها فى الجدول الآتى:

الربع الذى يقع فيه الضلع النهائى للزاوية	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	$]0 ، \frac{\pi}{2}[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{\pi}{2} ، \pi[$	+	−	−
الثالث	$]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$	−	+	−

$\frac{\pi}{2}$

جا، قتا (+) | كل الدوال (+)

π ——— ٠

ظا، ظتا (+) | جتا، قا (+)

$\frac{3\pi}{2}$

مثال

١ عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جا ١٣٠° ب ظا ٣١٥° ج جتا ٦٥٠° د قا (−٣٠°)

الحل

أ الزاوية التى قياسها ١٣٠° تقع في الربع الثانى ∴ جا ١٣٠° موجبة

ب الزاوية التى قياسها ٣١٥° تقع في الربع الرابع ∴ ظا ٣١٥° سالبة

ج الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تكافىء زاوية قياسها ٦٥٠° - ٣٦٠° = ٢٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تقع في الربع الرابع ∴ جتا ٦٥٠° موجبة.

د الزاوية التى قياسها (-٣٠°) تكافئ زاوية قياسها - ٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

الزاوية التى قياسها (-٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ قا (-٣٠°) موجبة.

حاول أن تحل

١ عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جتا ٢١٠° ب جا ٧٤٠° ج ظا - ٣٠٠° د جا ١٢٣٠°

مثال

٢ إذا كانت ∠ أ و ب في وضعها القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب وقياسها θ.

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هى:

أ (٠، -١) ب $(\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ص) ج (-س، س)

حيث س > ٠ ، ص >٠

الحل

أ جتا θ = ٠ ، جا θ = -١ ، ظا $\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

ب س^٢ + ص^٢ = ١ (دائرة الوحدة) ، **بالتعويض عن** س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$ + ص^٢ = ١ فيكون ص^٢ = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ ، ص = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ < ٠ (مرفوض)

∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ١

ج (-س)^٢ + (س)^٢ = ١ ∴ ٢س^٢ = ١ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لأن س > ٠

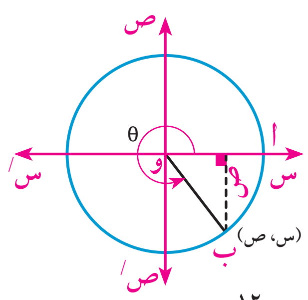
∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، -س = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ويكون: جتا θ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = -١

٣ إذا كانت ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° وكان جا θ = - $\frac{٥}{١٣}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ



الحل



نفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن إحداثيى النقطة ب هما (س، ص)

∵ ص = جا θ = - $\frac{٥}{١٣}$ ، س = جتا θ حيث جتا θ > ٠

∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ جتا^٢ θ + $(\frac{-٥}{١٣})^٢$ = ١

∴ جتا^٢ θ = ١ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ جتا^٢ θ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ أو جتا θ = - $\frac{١٢}{١٣}$

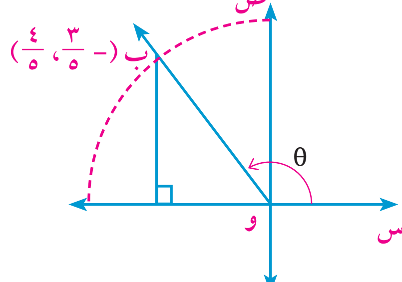
جتا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$ (لماذا)؟ ظا $\theta = -\frac{١٢}{٥}$

حاول أن تحل

② إذا كانت $٩٠° < \theta < ١٨٠°$، جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ أوجد جتا θ، ظا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة.

مثال

④ إذا كانت الزاوية التي قياسها θ و المرسومة فى الوضع القياسي، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $(-\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$. فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ.




الحل

جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، جتا $\theta = \frac{-٣}{٥} = -\frac{٣}{٥}$ ، ظا $\theta = \frac{٤}{-٣} = -\frac{٤}{٣}$

قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$ ، قا $\theta = \frac{٥}{-٣} = -\frac{٥}{٣}$ ، ظتا $\theta = \frac{-٣}{٤} = -\frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

③ أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب حيث:

أ ب $(\frac{٥}{١٣}، \frac{١٢}{١٣})$ ب ب $(\frac{٣}{٥}، -\frac{٤}{٥})$ جـ ب $(-\frac{١٢}{١٣}، \frac{٥}{١٣})$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة The trigonometric functions of some special angles

في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محورى الإحداثيات في النقاط $أ_١(١، ٠)$، $أ_٢(٠، ١)$، $أ_٣(-١، ٠)$، $أ_٤(٠، -١)$.

وكانت θ قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسي، والذى يقطع ضلعها النهائي و ب دائرة الوحدة في ب.

أولًا: إذا كانت $\theta = ٠°$ أو $\theta = ٣٦٠°$ **فإن:** ب$(١، ٠)$

ويكون: جتا $٠° =$ جتا $٣٦٠° = ١$ ، جا $٠° =$ جتا $٣٦٠° =$ صفر،

ظا $٠° =$ ظا $٣٦٠° =$ صفر

ثانيًا: إذا كانت $\theta = ٩٠° = \frac{\pi}{٢}$ **فإن:** ب$(٠، ١)$

جتا $٩٠° =$ صفر ، جا $٩٠° = ١$ ، ظا $٩٠° = \frac{١}{٠}$ (غير معرف)

ثالثًا: إذا كانت $\theta = ١٨٠° = \pi$ **فإن:** ب$(-١، ٠)$

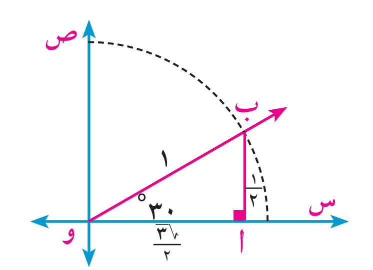
جتا $١٨٠° = -١$ ، جا $١٨٠° =$ صفر ، ظا $١٨٠° =$ صفر

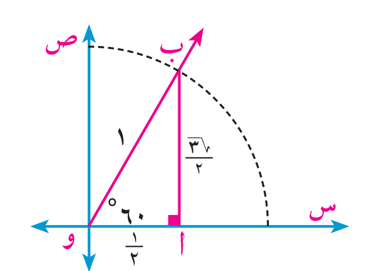
رابعًا: إذا كانت θ = ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$ **فإن:** ب(٠، -١)

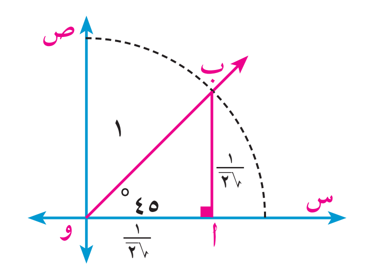
جتا ٢٧٠° = ٠ ، جا ٢٧٠° = -١ ، ظا ٢٧٠° = $\frac{-١}{صفر}$ (غير معرف)

حاول أن تحل

④ في الأشكال التالية حدد إحداثيي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°









مثال

⑤ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا^٢ $\frac{\pi}{٤}$

الحل

تعلم أن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ (١)

∵ $\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥° ، جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الطرف الأيسر = جا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ = جا^٢ ٤٥° = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

⑤ أوجد قيمة: ٣ جا ٣٠° جا^٢ ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا^٢ ٤٥°

تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التي قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
هل من الممكن أن يكون θ = ٢٤٠°؟ وضح ذلك.

تحقق من فهمك

أثبت صحة كلٍّ من المتساويات التالية:

أ ١ - ٢جا^٢ ٩٠° = جتا ١٨٠°

ب جتا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ - جا^٢ $\frac{\pi}{٤}$



تمـــارين ٤ – ٣

أولًا: الاختيار من متعدد:

١) إذا كان θ قياس زاوية فى الوضع القياسى و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ فإن جا θ تساوى:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

٢) إذا كانت جا θ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ زاوية حادة فإن θ تساوى

أ) ٣٠° ب) ٤٥° ج) ٦٠° د) ٩٠°

٣) إذا كانت جا θ = – ١، جتا θ = ٠ فإن θ تساوى

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) π ج) $\frac{٣\pi}{٢}$ د) ٢π

٤) إذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوى

أ) ١٥° ب) ٣٠° ج) ٤٥° د) ٦٠°

٥) إذا كانت جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جا θ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن θ تساوى

أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ د) $\frac{١١\pi}{٦}$

٦) إذا كانت ظا θ = ١ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ تساوى

أ) ١٠° ب) ٣٠° ج) ٤٥° د) ٦٠°

٧) ظا ٤٥° + ظتا ٤٥° – قا ٦٠° تساوى

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) ١

٨) إذا كانت جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن جا θ تساوى

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة

أ) $(\frac{٢}{٣}، \frac{\sqrt{٥}}{٣})$ ب) $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ج) $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$ د) $(-\frac{٣}{٥}، -\frac{٤}{٥})$

١٠ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة المعطاه فأوجد جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية فى الحالات الآتية:

أ (٣أ، -٤أ) حيث أ > ٠

ب $(\frac{٣}{٢}$أ، -٢أ$)$ حيث $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

١١ اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية:

أ جا ٢٤٠° ....

ب ظا ٣٦٥° ....

ج قتا ٤١٠° ....

د ظتا $\frac{٩\pi}{٤}$ ....

هـ قا $-\frac{٩\pi}{٤}$ ....

و ظا $\frac{-٢٠\pi}{٩}$ ....

١٢ أوجد قيمة ما يأتى:

أ جتا $\frac{\pi}{٢}$ × جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ × جا $\frac{\pi}{٢}$

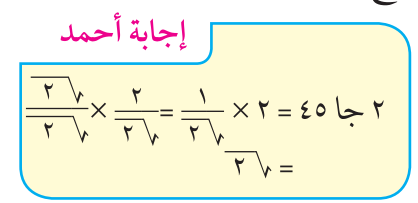
ب ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° + جتا² ٩٠°

١٣ اكتشف الخطأ: طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ جا ٤٥°.

إجابة كريم

٢ جا ٤٥° = جا ٢ × ٤٥°

= جا ٩٠° = ١



أى الإجابتين صحيح؟ ولماذا؟

١٤ تفكير ناقد: إذا كانت θ قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث ظتا θ = -١، قتا θ = $\sqrt{٢}$. هل من الممكن أن يكون θ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ؟ فسر إجابتك.

٤ - ٤

الزوايا المنتسبة

Related Angles

سوف تتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ١٨٠° ± θ
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٣٦٠° − θ
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٩٠° ± θ
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٢٧٠° ± θ
- الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة:
  - جا α = جتا β
  - قا α = قتا β
  - ظا α = ظتا β

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

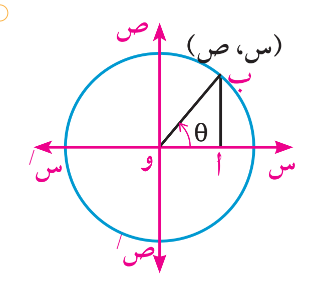
- زاويتان منتسبتان Related Angles

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



فكر و ناقش

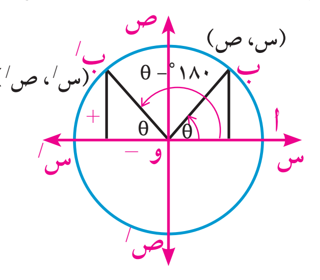


سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه .
يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ و ب في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص). قياسها θ حيث ٠° < θ < ٩٠°

عيِّن النقطة ب/ صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.

ما قياس ∠ أ و ب/؟ هل ∠ أ و ب/ في الوضع القياسي؟

١ - الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (١٨٠° − θ)



من الشكل المقابل ب/ (س/، ص/) صورة النقطة ب(س،ص) بالانعكاس حول محور الصادات فيكون س/ = −س ، ص/ = ص

لذلك فإن:

جا (١٨٠° − θ) = جا θ	قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ
جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ	قا (١٨٠° − θ) = − قا θ
ظا (١٨٠° − θ) = − ظا θ	ظتا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ

فمثلًا: جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا ١٣٥° = جا (١٨٠° − ٤٥°) = جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$



حاول أن تحل

١) أوجد ظا ١٣٥° ، جا ١٢٠° ، جتا ١٥٠°

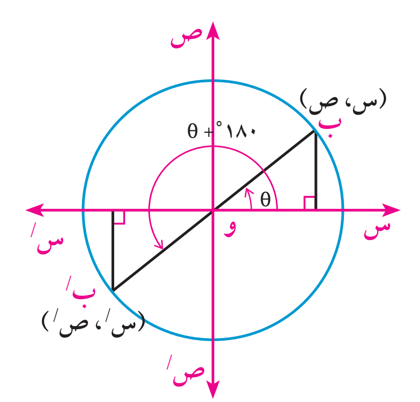
لاحظ أن: θ + (١٨٠° − θ) = ١٨٠°

يقال إن الزاويتين θ ، ١٨٠° − θ **زاويتان منتسبتان**.

تعريف

الزاويتان المنتسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيح من القوائم.

٢- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (١٨٠° + θ)



في الشكل المقابل نجد:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و فيكون س/ = - س، ص/ = - ص

لذلك فإن:

جا (١٨٠° + θ) = - جا θ	قتا (١٨٠° + θ) = - قتا θ
جتا (١٨٠° + θ) = - جتا θ	قا (١٨٠° + θ) = - قا θ
ظا (١٨٠° + θ) = ظا θ	ظتا (١٨٠° + θ) = ظتا θ

فمثلًا:

جا ٢١٠° = جا (١٨٠° + ٣٠°) = - جا ٣٠° = - $\frac{١}{٢}$

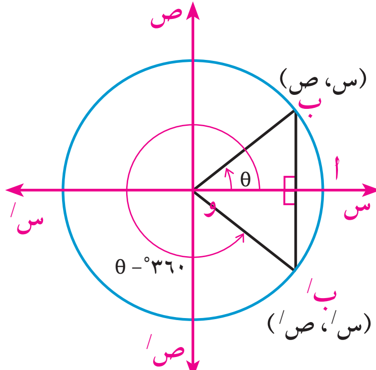
جتا ٢٢٥° = جتا (١٨٠° + ٤٥°) = - جتا ٤٥° = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد جا ٢٢٥° ، جتا ٢١٠° ، قا ٦٠٠° ، ظتا ٢٢٥°.

٣- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (٣٦٠° - θ)



في الشكل المقابل:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص)

بالانعكاس حول محور السينات فيكون س/ = س ، ص/ = - ص

لذلك فإن:

جا (٣٦٠° - θ) = - جا θ	قتا (٣٦٠° - θ) = - قتا θ
جتا (٣٦٠° - θ) = جتا θ	قا (٣٦٠° - θ) = قا θ
ظا (٣٦٠° - θ) = - ظا θ	ظتا (٣٦٠° - θ) = - ظتا θ

فمثلًا:

جا ٣٣٠° = جا (٣٦٠° - ٣٠°) = - جا ٣٠° = - $\frac{١}{٢}$

جتا ٣١٥° = جتا (٣٦٠° - ٤٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

لاحظ أن

الدوال المثلثية للزاوية (-θ) هى نفسها الدوال المثلثية للزاوية (٣٦٠° - θ)

حاول أن تحل

(٣) أوجد: جا ٣١٥° ، قتا ٣١٥° ، ظا ٣٣٠° ، ظا ٣٠٠°

تفكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (-٤٥°) ، جتا (-٦٠°) ، ظا(-٣٠°) ، جا ٦٩٠°.

مثال

١) بدون استخدام الآله الحاسبة أوجد قيمة المقدار

جا ١٥٠° جتا (-٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = ١/٢

جتا (-٣٠٠°) = جتا (-٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠° = ١/٢

جتا ٩٣٠° = جتا (٩٣٠° - ٢ × ٣٦٠°) = جتا ٢١٠°

وتكون جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = - جتا ٣٠° = - √٣/٢

ظتا ٢٤٠° = ظتا (١٨٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = ١/ظا ٦٠° = ١/√٣

المقدار = ١/٢ × ١/٢ + (-√٣/٢) × ١/√٣

= ١/٤ - ١/٢ = - ١/٤

حاول أن تحل

٤) أثبت أن جا ٦٠٠° جتا (-٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (-٢٤٠°) = -١

٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسهما θ ، (٩٠° - θ)

يبين الشكل المجاور جزءًا من دائرة مركزها و.

الزاوية التى قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها نق.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و جـ ب/:

نجد أن: س/ = ص ، ص/ = س



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° - θ)

جا (٩٠° - θ) = جتا θ ،	قتا (٩٠° - θ) = قا θ
جتا (٩٠° - θ) = جا θ ،	قا (٩٠° - θ) = قتا θ
ظا (٩٠° - θ) = ظتا θ ،	ظتا (٩٠° - θ) = ظا θ

مثال

٢) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة (٣/٥ ، ٤/٥)

فأوجد الدوال المثلثية: جا (٩٠° - θ) ، ظتا (٩٠° - θ)

الحل

∵ جا $(٩٠^\circ - \theta)$ = جتا θ ∴ جا $(٩٠^\circ - \theta) = \frac{٣}{٥}$

∵ ظتا $(٩٠^\circ - \theta)$ = ظا θ ∴ ظتا $(٩٠^\circ - \theta) = \frac{٤}{٣}$

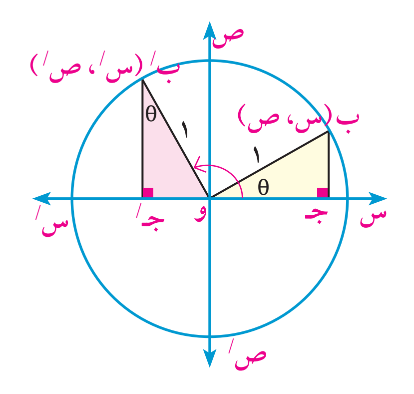
حاول أن تحل

٥ فى المثال السابق أوجد جتا $(٩٠^\circ - \theta)$ ، قتا $(٩٠^\circ - \theta)$

٥- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(٩٠^\circ + \theta)$

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

نجد أن ص/ = س ، س/ = −ص



ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(٩٠^\circ + \theta)$ كالآتى:

جا $(٩٠^\circ + \theta)$ = جتا θ	قتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = قا θ
جتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = −جا θ	قا $(٩٠^\circ + \theta)$ = −قتا θ
ظا $(٩٠^\circ + \theta)$ = −ظتا θ	ظتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = −ظا θ

مثال

٣ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{١}{٣}, \frac{٢\sqrt{٢}}{٣})$
أوجد الدوال المثلثية ظا $(٩٠^\circ + \theta)$ ، قتا $(٩٠^\circ + \theta)$

الحل

∵ ظا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − ظتا θ ∴ ظا $(٩٠^\circ + \theta) = -\frac{١}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

∵ قتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = قا θ ∴ قتا $(٩٠^\circ + \theta) = ٣$

حاول أن تحل

٦ فى المثال السابق أوجد: جا $(٩٠^\circ + \theta)$ ، قا $(٩٠^\circ + \theta)$

٦- الدوال المثلثية لأى لزاويتين قياسيهما θ ، (٢٧٠° - θ)

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ، (٢٧٠° - θ) كالآتى:

جا (٢٧٠° - θ) = - جتا θ ، قتا (٢٧٠° - θ) = - قا θ

جتا (٢٧٠° - θ) = - جا θ ، قا (٢٧٠° - θ) = - قتا θ

ظا (٢٧٠° - θ) = ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° - θ) = ظا θ



٤ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$) فأوجد الدوال المثلثية: جتا (٢٧٠° - θ) ، ظتا (٢٧٠° - θ)

الحل

∵ جتا (٢٧٠° - θ) = - جا θ ∴ جتا (٢٧٠° - θ) = - $\frac{2}{4}$ = - $\frac{1}{2}$

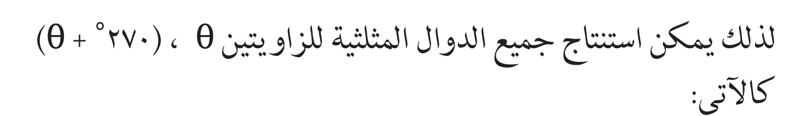
∵ ظتا (٢٧٠° - θ) = ظا θ ∴ ظتا (٢٧٠° - θ) = $\frac{2}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

حاول أن تحل

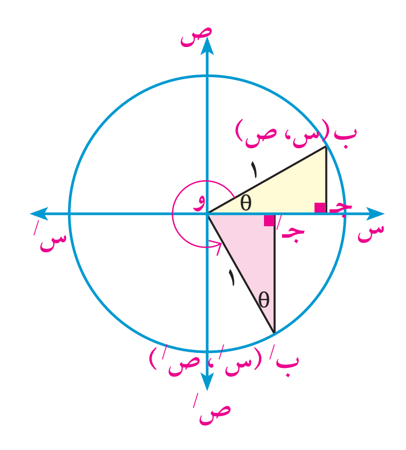
٧ فى المثال السابق أوجد ظا (٢٧٠° - θ)، قتا (٢٧٠° - θ)

٧- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (٢٧٠° + θ)

من تطابق المثلثين: ب/ جـ/ و، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٢٧٠° + θ) كالآتى:



جا (٢٧٠° + θ) = - جتا θ ، قتا (٢٧٠° + θ) = - قا θ

جتا (٢٧٠° + θ) = جا θ ، قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ

ظا (٢٧٠° + θ) = - ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° + θ) = - ظا θ

مثال

٥ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $\frac{2}{3}$) فأوجد الدوال المثلثية: جا (٢٧٠° + θ) ، قا (٢٧٠° + θ)

الحل

$\because$ جا $(٢٧٠° + \theta)$ = − جتا θ $\qquad$ $\therefore$ جا $(٢٧٠° + \theta)$ = $-\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

$\because$ قا $(٢٧٠° + \theta)$ = قتا θ $\qquad$ $\therefore$ قا $(٢٧٠° + \theta)$ = $\frac{٣}{٢}$

حاول أن تحل

٨ في المثال السابق أوجد ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ ، قتا $(٢٧٠° + \theta)$.

الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة: (جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β)

General solution of trigonometric equations as the form [tan α = cot β, sec α = cscb β, sin α = cos β]



سبق أن درست أنه إذا كان α، β هما قياسا زاويتين متتامتين (أى مجموع قياسيهما ٩٠°) فإن جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β ومن ذلك فإن $\alpha + \beta = ٩٠°$ حيث α، β زاويتان حادتان فإذا كانت جا θ = جتا ١٥° فما هى قيم زاوية θ المتوقعة؟

تعلم

١- إذا كان جا α = جتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} + \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} + \beta$ أى $\alpha - \beta = \frac{\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن $\in$ ص) إلى الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ فإن:

عندما جا α = جتا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)، بالمثل:

عندما قا α = قتا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)،
$\alpha \neq$ ن π ، $\beta \neq (٢$ن$ + ١)\frac{\pi}{٢}$

٢- إذا كان ظا α = ظتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن :

- ظا α = ظا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- ظا α = ظا $(\frac{٣\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{٣\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{٣\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن $\in$ ص) إلى الزاويتين $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن:

عندما ظا α = ظتا β فإن $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)،
$\alpha \neq (٢$ن$ + ١)\frac{\pi}{٢}$ ، $\beta \neq$ ن π

مثال

٦ حل المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

الحل

المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

$٢θ \pm θ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ (ن ∈ ص) من تعريف المعادلة

(١) إما $٢θ + θ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ أى أن: $٣θ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

$θ = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$ بقسمة الطرفين على ٣

(٢) أو $٢θ - θ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ أى أن: $θ = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حل المعادلة هو: $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$ أو $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حاول أن تحل

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ جا ٤ θ = جتا ٢ θ ب ٢جا$(θ - \frac{\pi}{٢}) = ١$ ج جتا٥ θ = جا θ

١٠ **اكتشف الخطأ:** فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة جا$(θ - \frac{\pi}{٢})$ فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

إجابة كريم	إجابة زياد
جا$(θ - \frac{\pi}{٢})$ = جا$(٢\pi + θ - \frac{\pi}{٢})$	جا$(θ - \frac{\pi}{٢})$ = جا [$-(\frac{\pi}{٢} - θ)$]
= جا$(\frac{٣\pi}{٢} + θ)$	= −جا$(\frac{\pi}{٢} - θ)$
= − جتا θ	= − (− جتا θ) = جتا θ

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم θ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[والتى تحقق كل من المعادلات الآتية :

أ جا θ − جتا θ =٠ ب ظتا $(θ - \frac{\pi}{٦})$ = قا θ ج ٢جتا$(θ - \frac{\pi}{٢})$ = ١

تمـــارين ٤ – ٤

أولًا: أكمل مايأتى:

١) جتا (١٨٠° + θ) = ...

٢) ظا (١٨٠° – θ) = ...

٣) قتا (٣٦٠° – θ) = ...

٤) جا (٣٦٠° + θ) = ...

٥) جا (٩٠° + θ) = ...

٦) ظتا (٩٠° – θ) = ...

٧) قا (٢٧٠° + θ) = ...

٨) جتا (٢٧٠° – θ) = ...

ثانيًا: أكمل كلًّا مما يأتى بقياس زاوية حادة

٩) جا ٢٥° = جتا ....°

١٠) جتا ٦٧° = جا ....°

١١) ظا ٤٢° = ظتا ....°

١٢) قتا ١٣° = قا ....°

١٣) إذا كان ظتا٢θ = طاθ حيث ٠° > θ > ٩٠° فإن ق (∠ θ) = ...

١٤) إذا كان جا ٥θ = جتا٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = ...°

١٥) إذا كان قا θ = قا(٩٠° – θ) فإن ظتا θ = ...

١٦) إذا كان ظا ٢θ = ظتا٣θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن ق (∠ θ) = = ...ء

١٧) إذا كان جتا θ = جا٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا٣θ = ...

ثالثًا: الاختيار من متعدد:

١٨) إذا كانت ظا (١٨٠° + θ) = ١ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوى

أ) ٤٥° ب) ٣٠° ج) ٦٠° د) ١٣٥°

١٩) إذا كان جتا ٢θ = جاθ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[فإن جتا ٢θ تساوى

أ) $\frac{١}{٢\sqrt{}}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) ١

٢٠) إذا كان جا α = جتا β، حيث α، β زاويتان حادتان فإن ظا(α + β) تساوى

أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ب) ١ ج) $\sqrt{٣}$ د) غير معروف

٢١) إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا(٩٠° – ٣θ) تساوى

أ) –١ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) ١ د) $\sqrt{٣}$

٢٢) إذا كان جتا(٩٠° + θ) = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوى

أ) ١٥٠° ب) ٢١٠° ج) ٢٤٠° د) ٣٣٠°

رابعًا: أجب عن الأسئلة الآتية

٢٣ أوجد إحدى قيم θ حيث $٠ \leqslant \theta < ٩٠°$ التى تحقق كلًّا من الآتى:

أ جا$(٣\theta + ١٥°)$ = جتا$(٢\theta - ٥°)$ ....

ب قا$(\theta + ٢٥°)$ = قتا$(\theta + ١٥°)$ ....

جـ ظا$(\theta + ٢٠°)$ = ظتا $(٣\theta + ٣٠°)$ ....

د جتا $\frac{\theta + ٢٠°}{٢}$ = جا $\frac{\theta + ٤٠°}{٢}$ ....

٢٤ أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ جا ١٥٠° ب قتا ٢٢٥ جـ قا ٣٠٠° د ظا ٧٨٠°

هـ قتا $\frac{١١\pi}{٦}$ و جا $\frac{٧\pi}{٤}$ ز ظتا $\frac{-٢\pi}{٣}$ ح جتا $\frac{-٧\pi}{٤}$

٢٥ إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ والمرسومة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $(-\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$ فأوجد:

أ جا$(١٨٠° + \theta)$ ....

ب جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ ....

جـ ظا $(٣٦٠° - \theta)$ ....

د قتا $(\frac{٣\pi}{٢} - \theta)$ ....

٤ - ٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية

Graphing of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

سوف تتعلم :
- رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
- رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- قيمة عظمى Maximum Value
- قيمة صغرى Minimum Value

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى
- برامج رسومية



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف فى طول الموجة. كما تستخدم فى التصوير الطبى، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل فى أعماق المحيطات .وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:

التمثيل البيانى لدالة الجيب Represent sine function graphically



١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

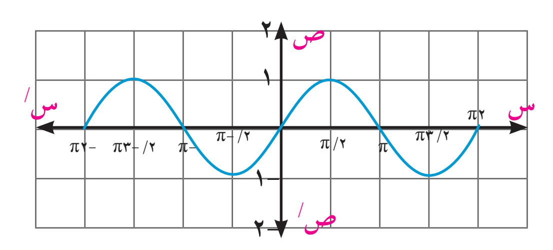
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جا θ	٠	٠,٥							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولا آخر مستخدما قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عُظمى أو قيم صُغرى لهذا المنحنى. فسِّر إجابتك؟

تعلم

خواص دالة الجيب

Properties of the sine function

في الدالة د حيث د(θ) = جا θ فإن:

★ مجال دالة الجيب هو]-∞، ∞[، ومداها [-١، ١]

★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة ٢π أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، ٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة، ٦π وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π   ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى -١ وتحدث عند النقاط θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ ن π   ن ∈ ص

التمثيل البيانى لدالة جيب التمام

Represent cosine function graphically



١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

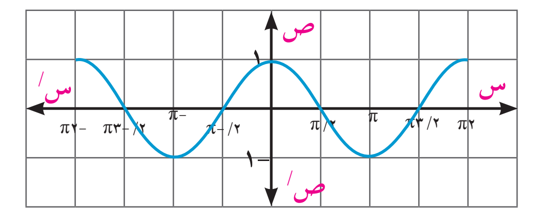
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
جتا θ	١	٠,٨							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولًا آخر مستخدمًا قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حَصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



تعلم

خواص دالة جيب التمام

Properties of cosine function

في الدالة د حيث د(θ) = جتا θ فإن:

★ مجال دالة جيب التمام هو]-∞، ∞[، ومداها [-١، ١]

★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة٢π، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، ٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة ، ٦π وحدة ، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pm ٢ ن \pi$ ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوى - ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pi \pm ٢\pi ن$ ن ∈ ص

مثال

١ الربط بالفيزياء: يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.
ارسم مخططًا بيانيًّا يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هى

من العلاقة: ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠

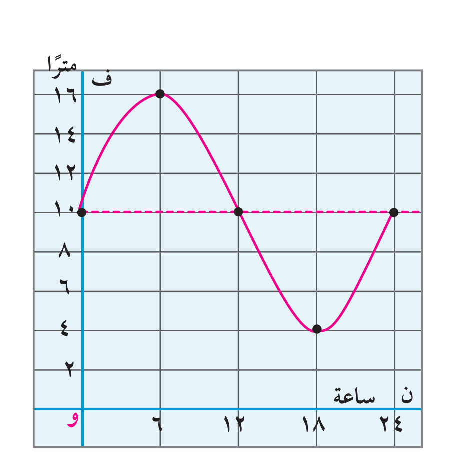
عندما ن = ٠ ف = ٦ جا (١٥ × ٠)° + ١٠ = ٦ جا ٠ + ١٠ = ١٠

عندما ن = ٦ ف = ٦ جا (١٥ × ٦)° + ١٠ = ٦ جا ٩٠° + ١٠ = ١٦

عندما ن = ١٢ ف = ٦ جا (١٥ × ١٢)° + ١٠ = ٦ جا ١٨٠° + ١٠ = ١٠

عندما ن = ١٨ ف = ٦ جا (١٥ × ١٨)° + ١٠ = ٦ جا ٢٧٠° + ١٠ = ٤

عندما ن = ٢٤ ف = ٦ جا (١٥ × ٢٤)° + ١٠ = ٦ جا ٣٦٠° + ١٠ = ١٠



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار
عندما ن = ٠، ١٢، ٢٤ ساعة

حاول أن تحل

١ في المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

تحقق من فهمك

١ ارسم منحنى الدالة ص = ٣جاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

٢ ارسم منحنى الدالة ص = ٢جتاس حيث س ∈ [٠، ٢π]



أولًا: أكمل مايأتى:

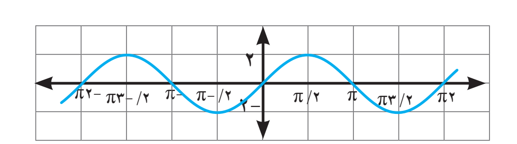
(١) مدى الدالة د حيث د(θ) = جا θ هو ....

(٢) مدى الدالة د حيث د(θ) = ٢ جا θ هو ....

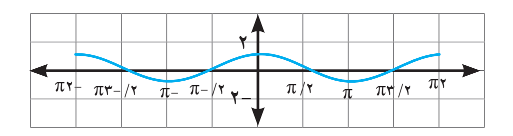
(٣) القيمة العظمى للدالة ع حيث ع(θ) = ٤جا θ هى ....

(٤) القيمة الصغرى للدالة هـ حيث هـ(θ) = ٣جتا θ هى ....

ثانيًا: اكتب قاعدة كل دالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها.



شكل (١) القاعدة هى:



شكل (٢) القاعدة هي:

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية :

(أ) ص = جا θ

....

(ب) ص = ٣ جتا θ

....

(جـ) ص = $\frac{٣}{٢}$ جا θ

....

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Trigonometric Ratios

٤ - ٦

سوف تتعلم

- إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية. Trigonometric Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



علمت أنه إذا كانت ص = جا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص بمعلومية الزاوية θ، وعندما تعطى قيمة ص فهل يمكنك إيجاد قيمة θ ؟



إذا كانت ص = جا θ

فإنه يمكن إيجاد قيم θ إذا علمت قيمة ص.

مثال

① أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

أ جا θ = ٠,٦٣٢٥ ب ظتا θ = (- ١,٦٢٠٤)

الحل

أ ∵ جيب الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ → SHIFT sin⁻¹ 0 . 6 3 2 5 = °'''

الربع الأول: θ = ٣٩° ١٤َ ٦ً

الربع الثانى: θ = ١٨٠° - ٣٩° ١٤َ ٦ً = ١٤٠° ٤٥َ ٥٤ً

ب ∵ ظل تمام الزاوية < ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ → SHIFT tan⁻¹ 1 . 6 2 0 4 x⁻¹ = °'''

الربع الثانى: θ = ١٨٠° - ٣١° ٤٠َ ٤٨ً = ١٤٨° ١٩َ ١٢ً

الربع الرابع: θ = ٣٦٠° - ٣١° ٤٠َ ٤٨ً = ٣٢٨° ١٩َ ١٢ً

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

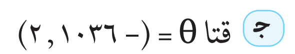
حاول أن تحل

① أوجد θ حيث ٠ < θ < ٣٦٠° والتي تحقق كلًّا مما يأتى:

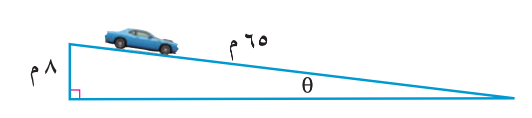
أ جتا θ = ٠,٦٢٠٥ ب ظا θ = (- ٢,٣٦١٥) ج قتا θ = (- ٢,١٠٣٦)

تحقق من فهمك

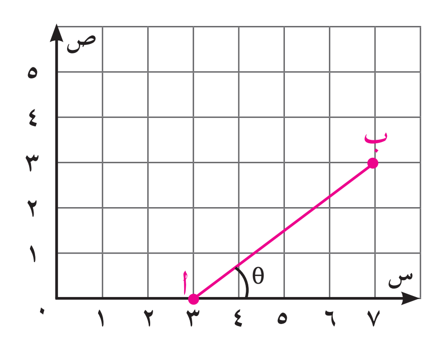
① **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات. لأقرب جزء من ألف.



② **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ . أوجد θ بالتقدير الستينى.



③ **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب (٧، ٣) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{أب}$ ومحور السينات.





أولًا: الاختيار من متعدد:

(١) إذا كان جا θ = ٠,٤٣٢٥ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ق$(\angle θ)$ تساوى

أ ٢٥,٦٢٦° ب ٦٤,٣٤٧° جـ ٣٢,٣٨٨° د ٤٦,٣١٦°

(٢) إذا كان ظا θ = ١,٨ وكانت ٩٠° $\leqslant$ θ $\leqslant$ ٣٦٠° فإن ق$(\angle θ)$ تساوى

أ ٦٠,٩٤٥° ب ١١٩,٠٥٥° جـ ٢٤٠,٩٤٥° د ٢٩٩,٠٥٥°

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من جتا θ، جا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{١}{٢}, \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ ب ب$(-\frac{١}{\sqrt{٢}}, -\frac{١}{\sqrt{٢}})$ جـ ب $(-\frac{٦}{١٠}, \frac{٨}{١٠})$

....

....

(٢) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من قاθ، قتاθ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}, -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ب ب$(-\frac{١}{\sqrt{٥}}, -\frac{٢}{\sqrt{٥}})$ جـ ب $(-\frac{٥}{١٣}, -\frac{١٢}{١٣})$

....

....

(٣) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من ظا θ، ظتا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{١}{\sqrt{١٠}}, -\frac{٣}{\sqrt{١٠}})$ ب ب $(\frac{٣}{\sqrt{٣٤}}, -\frac{٥}{\sqrt{٣٤}})$ جـ ب $(-\frac{٤}{٥}, -\frac{٣}{٥})$

....

....

(٤) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب

فأوجد: ق$(\angle θ)$ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° عندما:

أ ب $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}, \frac{١}{٢})$ ب ب$(-\frac{١}{\sqrt{٢}}, \frac{١}{\sqrt{٢}})$ جـ ب $(\frac{٦}{١٠}, \frac{-٨}{١٠})$

....

⑤ أوجد بالقياس الستينى أصغر زاوية موجبة تحقق كلًّا من:

أ جا$^{-1}$ ٠,٦ ب جتا$^{-1}$ ٠,٤٣٦ ج ظا$^{-1}$ ١,٤٥٥٢

....

د قا$^{-1}$ (– ٢,٢٣٦٤) هـ ظتا$^{-1}$ ٣,٦٢١٨ و قتا$^{-1}$ (–١,٦٠٠٤)

....

⑥ إذا كانت ٠° ⩽ θ ⩽ ٣٦٠° فأوجد قياس زاوية θ لكل مما يأتى:

أ جا$^{-1}$ (٠,٢٣٥٦) ب جتا$^{-1}$ (– ٠,٦٤٢) ج ظا$^{-1}$ (– ٢,١٤٥٦)

....

⑦ إذا كان جا θ = $\frac{١}{٣}$ وكانت ٩٠° ⩽ θ ⩽ ١٨٠°

أ احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية

....

ب أوجد قيمة كلٍّ من: جتاθ ، ظاθ ، قاθ .

....

....

....

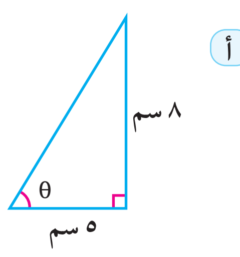
⑧ سلالم: سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٣ أمتار فأوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقى.

....

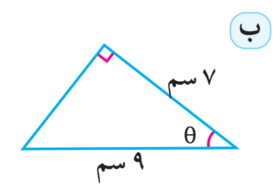
....

⑨ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستينى فى كل من الأشكال الآتية:

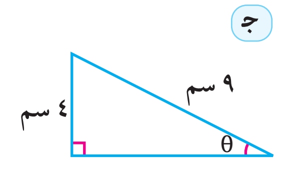
أ



ب



ج



....